Prof. Dr. M. Lesch
P. Holy

Abgabe bis 09.12.

Übungen zur Vorlesung Elemente der Mathematik

ÜBUNGSBLATT 7

Aufgabe 1: (3 Punkte) Seien $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ ganze Zahlen. Zeigen Sie, dass jede rationale Lösung Y einer Gleichung der Form $Y^n + a_{n-1}Y^{n-1} + \ldots + a_1 Y + a_0 = 0$ eine ganze Zahl sein muss.

Hinweis: Nehmen Sie an $\frac{p}{q}$ sei eine Lösung obiger Gleichung, wobei $p \in \mathbb{Z}$, q eine positive natürliche Zahl und der Bruch $\frac{p}{q}$ gekürzt ist. Zeigen Sie nun, dass q gleich 1 sein muss - also $\frac{p}{q}$ eigentlich ganze Zahl war.

Aufgabe 2: (5=2+3 Punkte) Verwenden Sie keinen Taschenrechner und keine Mathematiksoftware und versuchen Sie den Rechenaufwand gering zu halten.

(a) Betrachten Sie folgende unendliche Zahlenfolge: $41, 43, 47, 53, 61, \ldots$
Sei also $x_0 = 41$ und sei für $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + 2 \cdot (n+1)$. Ist jede Zahl in der Folge (also jedes x_n) eine Primzahl? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Betrachten Sie folgende unendliche Zahlenreihe:

$$31, 331, 3331, 33331, 333331, \ldots$$

Ist in dieser Reihe jede Zahl Primzahl? Begründen Sie Ihre Antwort. Geben Sie auch an, wie Sie zu Ihrem Ergebnis gekommen sind.

Aufgabe 3: (4 Punkte) Zeigen Sie:

(a) Seien $a, k, l, m \in \mathbb{N}$. Wenn $a^k \equiv 1\ (m)$ und $a^l \equiv 1\ (m)$, dann gilt auch $a^{(k,l)} \equiv 1\ (m)$.

(b) Es gilt für $a, x, y \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$ folgende Kürzungsregel:

$$a \cdot x \equiv a \cdot y\ (m) \iff x \equiv y\ \left(\frac{m}{(a,m)}\right).$$

Aufgabe 4: (6 Punkte) Sei $G = \langle a \rangle$ eine zyklische Gruppe der Ordnung n. Zeigen Sie dass dann gilt:

(a) Jede Untergruppe $U \subseteq G$ ist zyklisch.

(b) Ist k minimal mit $U = \langle a^k \rangle$ so gilt $k|n$ und $|U| = \frac{n}{k}$.

(c)
$$\mathrm{ord}(a^k) = \frac{n}{(k,n)}$$
für jedes $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.