Prof. Dr. M. Lesch
P. Holy

Abgabe bis 16.12.

Übungen zur Vorlesung Elemente der Mathematik

ÜBUNGSBLATT 8

Aufgabe 1: (4 Punkte) Zeigen Sie:

(a) Sei G eine (nicht notwendigerweise endliche) abelsche Gruppe. Dann ist $U = \{x \in G \mid \mathrm{ord}(x) \text{ endlich}\}$ eine Untergruppe von G.

(b) Sei G eine endliche Gruppe. Ist $|G|$ gerade, so ist die Anzahl der Elemente von Ordnung 2 in G ungerade.

Aufgabe 2: (4 Punkte) Zeigen Sie:

(a) Sei G eine endliche Gruppe. Ist p Primzahl, so gilt

$$p - 1 \text{ ist Teiler von } \big|\{x \in G \mid \mathrm{ord}(x) = p\}\big|.$$

(b) Sei G eine endliche Gruppe. Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\phi(n) \text{ ist Teiler von } \big|\{x \in G \mid \mathrm{ord}(x) = n\}\big|.$$

Aufgabe 3: (6 Punkte) Zeigen Sie:

(a) Ist $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$, so ist

$$\sum_{d \mid p^n} \phi(d) = p^n.$$

(b) Ist $n = a \cdot b > 0$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ und $(a, b) = 1$, so ist

$$\sum_{d \mid n} \phi(d) = \sum_{x \mid a} \phi(x) \cdot \sum_{y \mid b} \phi(y).$$

(c) Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt:

$$\sum_{d \mid n} \phi(d) = n.$$

Aufgabe 4: (5 Punkte) Wir definieren

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

und wollen in dieser Aufgabe mit Hilfe von Äquivalenzrelationen zeigen, dass die Anzahl der Möglichkeiten, aus einer n-elementigen Menge k Elemente auszuwählen, wobei es nicht auf deren Reihenfolge ankommen soll, gleich $\binom{n}{k}$ ist.

Wir betrachten dazu die Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ und bezeichnen eine Folge $S = \langle s_1, s_2, \ldots, s_n\rangle$ als Permutation von $\{1, 2, \ldots, n\}$ wenn $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$, also wenn S eine geordnete Aufzählung der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ ist. Beispielsweise ist etwa $\langle 2, 4, 3, 1\rangle$ eine Permutation von $\{1, 2, 3, 4\}$, $\langle 2, 3, 4, 1\rangle$ eine andere, und natürlich $\langle 1, 2, 3, 4\rangle$ auch eine.

Sei nun A die Menge aller Permutationen auf $\{1, 2, \ldots, n\}$ und sei $k \leq n$. Wir definieren nun eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf A folgendermaßen. Sind $a = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$ und $b = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n\rangle$ Elemente von A, so setzen wir

$$a \sim b \;\leftrightarrow \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}.$$

In Worte gefasst gilt $a \sim b$ also wenn deren erste k Elemente *bis auf Permutation gleich* sind.

Zeigen Sie jeweils:

(a) A hat $n!$ Elemente.
(b) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf A.
(c) Jede Äquivalenzklasse von $\sim$ hat $(n-k)! \cdot k!$ Elemente.
(d) $\sim$ hat $\binom{n}{k}$ Äquivalenzklassen.
(e) Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten k Elemente aus einer n-elementigen Menge auszuwählen, wenn es nicht auf die Reihenfolge dieser k Elemente ankommen soll.