Prof. Dr. M. Lesch
P. Holy

Abgabe bis 20.01.

Übungen zur Vorlesung Elemente der Mathematik

ÜBUNGSBLATT 11

Aufgabe 1: (3 Punkte) Wenden Sie das Heron-Verfahren an, um die ersten vier Nachkommastellen von $\sqrt{5}$ per Hand zu ermitteln. Verwenden Sie dazu die Fehlerabschätzung aus der Vorlesung.

Aufgabe 2: (8 Punkte) Sei $a \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und sei $p \in \mathbb{N}$ mit $p \geq 2$. Sei $\mathbb{Q}^p = \{(q_0, \ldots, q_{p-1}) \mid \forall i < p \; q_i \in \mathbb{Q}\}$. Wir identifizieren $z \in \mathbb{Q}$ dabei mit $(z, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Q}^p$. Für $q = (q_0, \ldots, q_{p-1})$ und $r = (r_0, \ldots, r_{p-1})$ in $\mathbb{Q}^p$ sei $q + r = (q_0 + r_0, \ldots, q_{p-1} + r_{p-1})$.

(a) Definieren Sie eine Multiplikation $\cdot$ auf $\mathbb{Q}^p$, die auf $\mathbb{Q} = \{(z, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Q}^p \mid z \in \mathbb{Q}\}$ mit der üblichen Multiplikation übereinstimmt, so dass die Gleichung $x^p = a\,[= (a, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Q}^p]$ eine Lösung in $\mathbb{Q}^p$ besitzt und so dass $(\mathbb{Q}^p, +, \cdot)$ ein Körper ist.

Tipp: Betrachten Sie Ausdrücke der Form $\sum_{i=0}^{p-1} q_i \sqrt[p]{a^i}$ mit $q_i \in \mathbb{Q}$ und identifizieren Sie diese mit $(q_0, \ldots, q_{p-1}) \in \mathbb{Q}^p$.

(b) Definieren Sie im Fall $p = 2$ eine Ordnung $\leq$ auf $\mathbb{Q}^2$, so dass $(\mathbb{Q}^2, +, \cdot, \leq)$ ein angeordneter Körper ist, in dem die Gleichung $x^p = a$ wie oben eine Lösung besitzt, wobei $+$ wie oben angegeben und $\cdot$ wie in der Lösung des ersten Aufgabenteils definiert ist.

Aufgabe 3: (3 Punkte) Ein b-adischer Bruch x ist eine unendliche Summe der Form $\pm \sum_{j=-k}^{\infty} a_j b^{-j}$ mit $a_j \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ und $k \in \mathbb{N}$. Sei nun für $n \in \mathbb{N}$ $x_n = \pm \sum_{j=-k}^{n-1} a_j b^{-j}$. Wir sagen, dass x eine Cauchy-Summe ist, wenn (x_n) eine Cauchy-Folge ist.

Zeigen Sie, dass jeder b-adische Bruch eine Cauchy-Summe ist.

Aufgabe 4: (4 Punkte) Sei $K \supseteq \mathbb{Q}$ ein vollständiger archimedisch angeordneter Körper. Wir definieren für $x, y \in K$ mit $x, y \geq 1$:

$$x^y = \sup(\{x^q \mid q \in \mathbb{Q}, q < y\}).$$

Zeigen Sie, dass für $x, y, z \in K$ mit $x, y, z \geq 1$ gilt:

$$(x^y)^z = x^{y \cdot z}.$$

Zeigen Sie, dass es $x, y \in K$ gibt, die beide nicht in $\mathbb{Q}$ liegen und so dass $x^y \in \mathbb{Q}$.

Tipp: Betrachten Sie $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$.