Prof. Dr. M. Lesch
P. Holy

Abgabe bis 27.01.

Übungen zur Vorlesung Elemente der Mathematik

ÜBUNGSBLATT 12

Aufgabe 1: (5 Punkte) Zeigen Sie: Sind A und B Mengen und ist $f\colon A \to B$ injektiv und $g\colon B \to A$ injektiv, so gibt es $h\colon B \to A$ bijektiv.

Tipp: Sei $S_0 = B \setminus f[A]$. Falls $S_0 = \emptyset$, so sind wir fertig. Sonst sei für $n \in \mathbb{N}$: $S_{n+1} = f[g[S_n]]$. Wir definieren jetzt $h\colon B \to A$ folgendermassen:

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{falls } x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n \\ f^{-1}(x) & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie nun, dass h eine Bijektion von B nach A ist.

Wir nennen eine Menge X *abzählbar* wenn es eine Injektion $f\colon X \to \mathbb{N}$ gibt. Gibt es eine solche Injektion nicht, nennen wir X *überabzählbar*.

Aufgabe 2: (3 Punkte) Zeigen Sie:

(a) Eine Menge X ist unendlich genau dann wenn es eine Injektion von $\mathbb{N}$ nach X gibt.

(b) Eine Menge X ist abzählbar und unendlich genau dann wenn es eine Bijektion zwischen X und $\mathbb{N}$ gibt.

Aufgabe 3: (6 Punkte) Zeigen Sie:

(a) Ist $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ und ist jedes A_i abzählbar, so ist A abzählbar.

(b) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

(c) Für jedes $b \geq 2$ in $\mathbb{N}$ ist die Menge der b-adischen Brüche überabzählbar (und somit ist $\mathbb{R}$ überabzählbar).

Tipp: Nehmen Sie (mit Hilfe von Aufgabe 2b) für einen Widerspruch an, dass $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Aufzählung aller b-adischen Brüche sei. Definieren Sie einen b-adischen Bruch y der für alle $i \in \mathbb{N}$ an der i-ten Stelle mit der i-ten Stelle von x_i nicht übereinstimmt. Erläutern Sie warum das einen Widerspruch ergibt.

Aufgabe 4: (6 Punkte) In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass es, wenn wir auf die Bedingung der archimedischen Anordnung verzichten, noch andere vollständige angeordnete Körper $K \supseteq \mathbb{Q}$ gibt als $\mathbb{R}$. Sei $\mathbb{R}[x]$ die Menge aller reellen Polynome in einer Unbestimmten x, d.h. $\mathbb{R}[x] = \{a_r x^r + a_{r+1}x^{r+1} + \ldots + a_{r+k}x^{r+k} \mid a_i \in \mathbb{R}, r, k \in \mathbb{N}, (k > 0 \to a_r \neq 0)\}$. Wir betrachten $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}[x]$, indem wir das Polynom $a_0x^0 \in \mathbb{R}[x]$ mit $a_0 \in \mathbb{R}$ identifizieren.

(a) Zeigen Sie, dass

$$a_r x^r + \ldots + a_{r+k} x^{r+k} > 0 \iff a_r > 0$$

eine Anordnung auf dem Ring $\mathbb{R}[x]$ definiert. Dabei sind die Ringoperationen $+$ und $\cdot$ die übliche Addition und Multiplikation von Polynomen.

(b) Zeigen Sie: Es gibt ein positives $y \in \mathbb{R}[x]$, so dass $\forall r \in \mathbb{R}\ (r > 0 \to y < r)$, also dass es ein positives $y \in \mathbb{R}[x]$ gibt, welches kleiner als alle positiven reellen Zahlen ist.

(c) Definieren Sie einen angeordneten Körper $J \supseteq \mathbb{R}[x]$, so dass die Ordnung auf J die oben definierte Ordnung auf $\mathbb{R}[x]$ erweitert. Zeigen Sie, dass J nicht archimedisch ist.

Bemerkung: J ist nicht notwendigerweise vollständig, man kann aber einen vollständigen angeordneten Körper $K \supseteq J$ konstruieren. Dieser ist dann ebenfalls nicht archimedisch.