1 Die Axiome von ZFC

Uebung 1.1 *Zeige: Wenn* $\{u, a\} = \{u, b\}$*, dann ist* $a = b$.

Uebung 1.2 *Das geordnete Paar von* x *und* y *ist definiert als*

$$\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Zeige: $\langle x, y\rangle = \langle x', y'\rangle$ *impliziert* $x = x'$ *und* $y = y'$.

Uebung 1.3 *Eine Menge* x *ist transitiv, wenn* $\forall y \in x\, \forall z(z \in y \rightarrow z \in x)$. *Zeige:*

1. $\emptyset$ *ist transitiv.*
2. *Wenn* x *und* y *transitiv sind, dann sind* $\{x\}$ *und* $\{x, y\}$ *transitiv.*
3. *Wenn fuer jedes* $i \in I$ *(*I *eine beliebige Indexmenge)* A_i *transitiv ist, so ist* $\bigcup_{i\in I} A_i$ *transitiv* ($\bigcup_{i\in I} A_i = \{a\colon a \in A_i$ *fuer ein* $i \in I\}$).
4. $\langle\emptyset, \emptyset\rangle$ *ist nicht transitiv.*

Uebung 1.4 *Man finde eine Formel* φ *in* $\mathcal{L}(\in)$ *so dass* $\varphi(z)$ *gilt genau dann wenn* z *ein geordnetes Paar ist.*

Hinweis: Finde zuerst Formeln ψ_0 und ψ_1 so dass $\psi_0(a, b) \iff a = \{b\}$ und $\psi_1(a, b, c) \iff a = \{b, c\}$. Setze daraus die gesuchte Formel zusammen.

Uebung 1.5 *Sei* z *ein geordnetes Paar. Fuer* $z = \langle a, b\rangle$ *bezeichnen wir* a *als die erste und* b *als die zweite Komponente von* z.

1. *Finde eine Formel* φ_0 *in* $\mathcal{L}(\in)$ *so dass* $\varphi_0(x, z)$ *gilt genau dann wenn die erste Komponente von* z *gleich* x *ist.*
2. *Finde eine Formel* φ_1 *in* $\mathcal{L}(\in)$ *so dass* $\varphi_1(y, z)$ *gilt genau dann wenn die zweite Komponente von* z *gleich* y *ist.*

Uebung 1.6 *Definiere das geordnete Paar folgendermassen:*

$$\langle x, y\rangle = \{x, \{y\}\}.$$

Funktioniert das? Gilt eine Analogie zu Uebung 1.2? Wenn ja, versuche Analogien zu den gesuchten Formeln aus Uebung 1.4 und 1.5 zu finden.

Uebung 1.7 *Definiere das geordnete Paar folgendermassen:*

$$\langle x, y\rangle = \{\{\{x\}, \emptyset\}, \{\{y\}\}\}.$$

Funktioniert das? Gilt eine Analogie zu Uebung 1.2? Wenn ja, versuche Analogien zu den gesuchten Formeln aus Uebung 1.4 und 1.5 zu finden.

Uebung 1.8 *Versuche eine geeignete Definition fuer ein geordnetes Tripel zu finden und zeige (aehnlich zu Uebung 1.2) dass aus dem geordneten Tripel eindeutig dessen Komponenten rekonstruiert werden koennen (also dass aus* $\langle x, y, z\rangle = \langle x', y', z'\rangle$ *folgt, dass* $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$*).*

Uebung 1.9 *Eine staerkere Version des Ersetzungsschemas ist das folgende Schema, das fuer jedes* $\varphi \in \mathcal{L}(\in)$ *in dem* Y *nicht frei auftritt den universellen Abschluss folgenden Satzes beinhaltet:*

$$\forall x \in A\, \exists! y\, \varphi(x, y) \;\rightarrow\; \exists Y\, (\forall x \in A\, \exists y \in Y\; \varphi(x, y) \wedge \forall y \in Y\, \exists x \in A\; \varphi(x, y)).$$

Zeige dass diese staerkere Form des Ersetzungsschemas aus dem schwaecheren Ersetzungsschema zusammen mit dem Aussonderungsschema (comprehension) folgt.

Uebung 1.10 *Zeige dass das Aussonderungsschema aus der staerkeren Form des Ersetzungsschemas (Uebung 1.9) zusammen mit dem Axiom von der Existenz der leeren Menge* ($\exists x\, \forall y\; \neg(y \in x)$) *folgt.*

Hinweis: Betrachte eine spezielle Instanz des Aussonderungsschemas, welche fuer gegebenes z und φ die Existenz der Menge $y = \{x \colon x \in z \wedge \varphi(x)\}$ postuliert. Unterscheide die Faelle $y = \emptyset$ und $y \neq \emptyset$. Wenn $y \neq \emptyset$, fixiere ein $a \in y$ und setze $\psi(x, y) \iff (\varphi(x) \wedge x = y) \vee (\neg\varphi(x) \wedge y = a)$.

FUER DIE 2. UEBUNG:

Uebung 1.11 *Definiere das geordnete Paar folgendermassen:*

$$\langle x, y\rangle = \{x, \{x, y\}\}.$$

Funktioniert das? Gilt eine Analogie zu Uebung 1.2? Wenn ja, versuche Analogien zu den gesuchten Formeln aus Uebung 1.4 und 1.5 zu finden.

Hinweis: Benutze das Fundierungsaxiom (Axiom of Foundation).