1 Geordnete Paare

Uebung 1.1 *Zeige: Wenn* $\{u, a\} = \{u, b\}$*, dann ist* $a = b$*.*

Beachte: Bei der Mengenschreibweise sind mehrfache Aufzaehlungen des selben Elementes moeglich, machen aber fuer die Menge keinen Unterschied, ebenso macht die Reihenfolge der Aufzaehlung keinen Unterschied - also ist etwa $\{1, 1\} = \{1\}$ oder $\{1, 2, 3, 1\} = \{2, 1, 3\}$.

Uebung 1.2 *Das geordnete Paar von* x *und* y *wird normalerweise definiert als*

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Zeige: $(x, y) = (x', y')$ *impliziert* $x = x'$ *und* $y = y'$*.*

Beachte: x und y koennen selbst Mengen sein (vielmehr noch sind in der axiomatischen Mengenlehre im Grunde alle Objekte Mengen, wir betreiben hier aber im wesentlichen noch naive Mengenlehre). Dieser Hinweis ist insbesondere auch fuer die naechste Aufgabe relevant:

Uebung 1.3 *Definiere das geordnete Paar (alternativ zu oben) folgendermassen:*

$$(x, y) = \{x, \{y\}\}.$$

Gilt eine Analogie zu Uebung 1.2?

Uebung 1.4 *Definiere das geordnete Paar (wieder alternativ zu oben) folgendermassen:*

$$(x, y) = \{\{\{x\}, \emptyset\}, \{\{y\}\}\}.$$

Gilt eine Analogie zu Uebung 1.2?

Bemerkung: $\emptyset$ bezeichnet die leere Menge.

Uebung 1.5 *Versuche eine geeignete Definition fuer ein geordnetes Tripel zu finden und zeige (aehnlich zu Uebung 1.2) dass aus dem geordneten Tripel eindeutig dessen Komponenten rekonstruiert werden koennen (also dass aus* $(x, y, z) = (x', y', z')$ *folgt, dass* $x = x'$*,* $y = y'$*,* $z = z'$*).*

2 Funktionen in der Mengenlehre

Definiton: In der Mengenlehre betrachten wir eine Funktion f einfach als eine Menge f von geordneten Paaren, wobei $(x, y) \in f$ ($\in$ bezeichnet die Elementrelation, beispielsweise meint $a \in b$ also "a ist ein Element von b") genau dann wenn $f(x) = y$ (also wenn x unter f auf y abgebildet wird). Ebenso betrachten wir eine Relation R auf einer Menge X als Menge von geordneten Paaren aus X (also geordneten Paaren (x, y) mit $x \in X$ und $y \in X$), wobei $(x, y) \in R$ genau dann wenn x und y in Relation zueinander stehen (Notation: xRy). Eine Relation R ist eine Funktion genau dann wenn es fuer jedes x hoechstens ein y gibt mit xRy.

Definition: Als Domain oder Quellmenge einer Funktion f bezeichnen wir die Menge aller x, die unter f abgebildet werden, "formal" also $\mathrm{dom}(f) = \{x\colon \exists y\ (x, y) \in f\}$ (also die Menge aller x fuer die es ein y gibt, so dass x unter f auf y abgebildet wird). Als Range oder Bild einer Funktion f bezeichnen wir die Menge aller y, fuer die es ein x gibt, das unter f auf y abgebildet wird. "Formal" also $\mathrm{range}(f) = \{y\colon \exists x\ (x, y) \in f\}$. Analoge Defintionen verwenden wir im Falle einer Relation R fuer $\mathrm{dom}(R)$ und $\mathrm{range}(R)$, also etwa $\mathrm{dom}(R) = \{x\colon \exists y\ (x, y) \in R\}$.

Definiton: Fuer eine beliebige Relation R bezeichne R^{-1} die "inverse" Relation, also $R^{-1} = \{(y, x)\colon (x, y) \in R\}$, also die Menge aller geordneten Paare (y, x), fuer die x bezueglich R in Relation zu y steht.

Uebung 2.1 *Zeige: Fuer eine beliebige Relation R gilt* $\mathrm{dom}(R^{-1}) = \mathrm{range}(R)$ *und* $\mathrm{range}(R^{-1}) = \mathrm{dom}(R)$.

Bemerkung: Da jede Funktion ja auch eine Relation ist, koennen wir analog zu oben fuer jede Funktion f die Relation f^{-1} bilden.

Uebung 2.2 *Zeige: Ist f injektiv, so ist f^{-1} eine injektive Funktion.*

Bemerkung: Eine Funktion f ist injektiv, wenn aus $x \neq y$ folgt, dass $f(x) \neq f(y)$ (fuer alle x und y in $\mathrm{dom}(f)$).

Notation: Wir schreiben $f\colon A \to B$ wenn f eine Funktion ist, $\mathrm{dom}(f) = A$ und $\mathrm{range}(f) \subseteq B$ ($\mathrm{range}(f)$ muss also nur eine Teilmenge von B sein).

Uebung 2.3 *Ist $f\colon A \to B$ injektiv, so gibt es $g\colon B \to A$ surjektiv.*

Bemerkung: $g\colon B \to A$ ist surjektiv, wenn es fuer jedes x aus A ein y aus B gibt mit $g(y) = x$, also jedes Element von A von g getroffen wird, also wenn $\mathrm{range}(g) = A$.

Uebung 2.4 *Ist $f\colon A \to B$ surjektiv, so gibt es $g\colon B \to A$ injektiv.*

Zusatz: Dieser Beweis benoetigt das Auswahlaxiom. Versuche zu ueberlegen, wo du es im Beweis verwendest. Versuche auch zu ueberlegen, warum der Beweis ohne Auswahlaxiom funktioniert, wenn A und B zum Beispiel Teilmengen der natuerlichen Zahlen sind.

Das Auswahlaxiom: Das Auswahlaxiom besagt, dass fuer jede Familie $A = (A_i\colon i \in I)$ von Mengen so dass fuer alle i aus I A_i nicht leer ist, es eine Funktion f gibt mit $\mathrm{dom}\, f = A$ und fuer alle $i \in I$ gilt $f(A_i) \in A_i$. Es gibt also eine Funktion f die aus jedem A_i ein Element auswaehlt.

Uebung 2.5 *Seinen f und g Funktionen. Wann ist $f \cup g$ eine Funktion?*

Bemerkung: $f \cup g$ bezeichnet hier einfach die Vereinigungsmenge der Mengen f und g, also $f \cup g = \{p\colon p \in f \text{ oder } p \in g\}$ (das oder ist hier natuerlich nicht ausschliessend).