3 Der Satz von Schroeder-Bernstein

Uebung 1 *Sei $F = \langle f_i : i \in I \rangle$ eine Familie von Funktionen, I eine beliebige Indexmenge. Wann ist $\bigcup_{i\in I} f_i$ eine Funktion?*

Bemerkung: $\bigcup_{i\in I} f_i = \{x : \exists i \in I \; x \in f_i\}$, die Vereinigungsmenge der f_i.

Notation: Fuer eine Menge A schreiben wir $|A|$ fuer die Maechtigkeit von A. Wir schreiben $|A| \leq |B|$ wenn es eine injektive Funktion von A nach B gibt. Wie in der Vorlesung schon gezeigt, gilt

$$(|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |C|) \rightarrow (|A| \leq |C|).$$

Uebung 2 *Zeige: Ist $|A| \leq |B|$ und $|C| \leq |D|$, so ist $|A \cup B| \leq |C \cup D|$ und $|A \times B| \leq |C \times D|$.*

Notation: $A \times B$ bezeichnet das "Kreuzprodukt" von A und B, also

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}.$$

Notation: Wir schreiben $|A| = |B|$ wenn $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |A|$. Wir sagen in diesem Fall auch, A und B seien gleichmaechtig.

Uebung 3 (Satz von Schroeder-Bernstein) *Zeige: $|A| = |B|$ gilt genau dann wenn es eine Bijektion von A nach B gibt, bzw. gleichwertig:*

Gibt es eine Injektion $f : A \rightarrow B$ und eine Injektion $g : B \rightarrow A$, so gibt es eine Bijektion $h : B \rightarrow A$. Beachte die folgenden Hinweise:

Notation: $A \setminus B$ bezeichnet die mengentheoretische Differenz von A und B, also $A \setminus B$ ist die Menge aller x in A, die nicht in B enthalten sind. Wir bezeichnen eine Funktion $f : A \rightarrow B$ als Bijektion (bzw. bijektiv), wenn f sowohl injektiv als auch surjektiv ist. Ist f eine Funktion und $H \subseteq \operatorname{dom} f$ so bezeichnen wir mit $f \restriction H$ die Einschraenkung von f auf die Menge H, also $f \restriction H = \{(x, y) \in f : x \in H\}$. Unter gleichen Voraussetzungen bezeichnen wir mit $f"H$ das Bild der Menge H unter f, also $f"H = \{y : \exists x \in H \; f(x) = y\}$.

Hinweis: Seien f, g, A und B wie in der Angabe des Uebungsbeispiels. Sei $S_0 := B \setminus \operatorname{range}(f)$. Falls $S_0 = \emptyset$, dann sind wir fertig, denn dann ist f surjektiv, also eine Bijektion. Definiere nun induktiv $S_{n+1} = f"(g"S_n)$ fuer alle natuerlichen Zahlen $n \geq 0$. Definiere nun h folgendermassen:

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{if } x \in \bigcup_{n\in N} S_n \\ f^{-1}(x) & \text{if } x \in B \setminus (\bigcup_{n\in N} S_n) \end{cases}$$

Zeige nun: $h(x)$ ist fuer jedes $x \in B$ definiert (zu zeigen ist, dass $B \setminus (\bigcup_{n\in N} S_n) \subseteq \operatorname{range}(f)$), h ist eine Funktion, ist injektiv und surjektiv, also bijektiv. Erstelle eine (hilfreiche) Skizze!