1 Die Axiome von ZFC

Uebung 1.1 *Zeige: Die Existenz des kartesischen Produktes $A \times B$ laesst sich auch ohne Verwendung des Ersetzungsschemas, unter Verwendung insbesondere des Potenzmengenaxioms und des Aussonderungsschemas beweisen. Verwende hier wieder die Standarddefinition $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.*

Hinweis: $A \times B \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$, wobei $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X, also die Menge aller Teilmengen von X bezeichnet.

Uebung 1.2 *Folgt aus $A \times B = C \times D$ dass $A = C$ und $B = D$?*
Beweise die Aussage oder finde ein Gegenbeispiel.

Uebung 1.3 *Zeige: $\mathcal{P}(X) \neq X$.*

Definition 1.4 *Das Axiom von der Existenz der leeren Menge lautet folgendermassen:*

$$\exists x \, \forall y \; y \notin x.$$

Uebung 1.5 *Zeige: Das Axiom von der Existenz der leeren Menge folgt aus dem Aussonderungsschema.*

Hinweis: Ein Axiom der Logik ist $\exists x \; x = x$, es besagt im Rahmen von ZFC, dass eine Menge existiert. Verwende dieses Axiom.

Uebung 1.6 *Zeige: Das Aussonderungsschema folgt aus dem Ersetzungsschema zusammen mit dem Axiom von der Existenz der leeren Menge.*