7. Wohlordnungen

Uebung 1 *Ist (A, R) eine Wohlordnung (also R eine Wohlordnung auf A) und ist $B \subseteq A$, so ist $(B, R \restriction B)$ eine Wohlordnung.*

Notation: $R \restriction B$ bezeichnet die Einschraenkung von R auf B, genauer:

$$R \restriction B = \{(x, y) \in R \colon x \in B \wedge y \in B\}.$$

Uebung 2 *Zeige: Ist (A, R) eine Wohlordnung und $f \colon A \to A$ ein Isomorphismus, so ist f die Identitaet auf A.*

Uebung 3 *Ueberlege die Details im Beweis von Satz 6.3 aus Kunen's Buch.*

8. Endliche Mengen

Definition: Wir definieren die natuerlichen Zahlen folgendermassen:

- $0 = \emptyset$,
- $1 = \{0\}$,
- $2 = \{0, 1\}$,
- ...
- allgemein: $n = \{0, \dots, n-1\}$.
- $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ ist die Menge der natuerlichen Zahlen.

Definition: Wir sagen eine Menge X hat n Elemente, wenn es eine Bijektion von X nach n gibt. Wir bezeichnen eine Menge X als endlich, wenn sie n Elemente hat fuer eine natuerliche Zahl n. Wir sagen X ist unendlich, wenn X nicht endlich ist.

Uebung 4 *Zeige: Die Vereinigung endlich vieler endlicher Mengen ist endlich. Jede Teilmenge einer endlichen Menge ist endlich. Ist f eine Funktion und X endlich, so ist $f''X$ endlich.*

Uebung 5
Zeige: X ist unendlich genau dann wenn es eine Injektion $f \colon \omega \to X$ gibt.

Uebung 6 *Zeige: X ist unendlich genau dann wenn es eine echte Teilmenge A von X gibt mit einer Bijektion $f \colon A \to X$.*

Definition: Wir bezeichnen eine Menge X als T-endlich (T fuer Tarski), wenn jedes nichtleere $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein $\subset$-maximales Element hat, also ein $u \in S$ so dass es kein $v \in S$ gibt mit $u \subset v$ und $u \neq v$, dabei bezeichnet $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X. Wir sagen X ist T-unendlich, wenn X nicht T-endlich ist.

Uebung 7 *Zeige: Jede natuerliche Zahl n ist T-endlich.*

Uebung 8 *Zeige: ω ist T-unendlich.*

Uebung 9 *Zeige: Jede endliche Menge ist T-endlich.*

Uebung 10 *Zeige: Jede unendliche Menge ist T-unendlich.*

Hinweis: Sei X unendlich. Sei $S = \{u \subseteq X : u \text{ endlich}\}$.
S hat kein $\subset$-maximales Element.

Bemerkung: Somit sind die Begriffe endlich und T-endlich also gleichwertig (zumindest modulo ZFC).