7. Ordinalzahladdition

Uebung 1
Zeige: ξ *ist Limesordinalzahl genau dann wenn* $\forall \zeta\ (\zeta < \xi \to \zeta + 1 < \xi)$.

Uebung 2 *Zeige: Es gibt beliebig grosse Limesordinalzahlen, also*

$$\forall \beta\, \exists \alpha\ \alpha \geq \beta \wedge \alpha \text{ Limesordinalzahl.}$$

Uebung 3 *Finde eine Folge* $\langle A_i \colon i \in \omega \rangle$ *so dass* $A_i \subseteq A_j \subseteq \mathbf{Ord}$ *for* $i < j$ *in* ω, *aber so dass die folgende Aussage nicht gilt:*

$$\bigcup_{i \in \omega} \mathrm{type}(\langle A_i, \in \rangle) = \mathrm{type}(\langle \bigcup_{i \in \omega} A_i, \in \rangle).$$

Hinweis: Suche eine aufsteigende Folge endlicher Mengen $\langle A_i \colon i \in \omega \rangle$ mit $\bigcup_{i \in \omega} A_i = \omega + \omega$. **Ord** bezeichnet die (echte) Klasse der Ordinalzahlen.

Ist $(A, \in)$ eine Wohlordnung, so bezeichnet $\mathrm{type}(A, \in)$ den Ordnungstyp der $\in$-Relation auf A, also die eindeutig bestimmte Ordinalzahl α, so dass $(A, \in)$ isomorph zu $(\alpha, \in)$ ist.

Uebung 4 *Zeige: Ist* $\alpha < \beta$, *so ist* $\gamma + \alpha < \gamma + \beta$ *und* $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$. *Gib ein Beispiel dass* $\leq$ *nicht durch* $<$ *ersetzt werden kann.*

Uebung 5
Sei $\alpha < \zeta$. *Zeige: Es gibt ein eindeutig bestimmtes* δ *mit* $\alpha + \delta = \zeta$.

Uebung 6 *Zeige: Ist* β *Limesordinalzahl, so ist* $\alpha + \beta = \sup\{\alpha + \xi \colon \xi < \beta\}$.

8. Klassen

Definition 1 *Eine Folge von Ordinalzahlen* $\langle \gamma_\alpha \colon \alpha \in \mathbf{Ord} \rangle$ *heisst normal, wenn sie streng monoton wachsend und stetig ist, also wenn* $\alpha_0 < \alpha_1 \to \gamma_{\alpha_0} < \gamma_{\alpha_1}$ *und* $\bigcup_{\alpha < \beta} \gamma_\alpha = \gamma_\beta$.

α *heisst Fixpunkt der Folge* $\langle \gamma_\alpha \colon \alpha \in \mathbf{Ord} \rangle$ *wenn* $\gamma_\alpha = \alpha$.

Uebung 7 *Zeige: Eine normale Folge von Ordinalzahlen* $\langle \gamma_\alpha \colon \alpha \in \mathbf{Ord} \rangle$ *hat beliebig grosse Fixpunkte.*

Hinweis: Waehle α_0 beliebig und setze $\alpha_{n+1} = \gamma_{\alpha_n}$ fuer $n \in \omega$. Sei $\alpha = \bigcup_{n < \omega} \alpha_n$. Zeige: α ist Fixpunkt der gegebenen Folge.

9. Das Auswahlaxiom

Bemerkung:
Das Auswahlaxiom ist in Kunen's Buch folgendermassen definiert:

$$\forall A\, \exists R\ (R \text{ ist eine Wohlordnung auf } A).$$

Uebung 8 *Zeige (ohne Verwendung des Auswahlaxioms), dass fuer jede Menge X die folgenden Aussagen aequivalent sind:*

1. *X kann wohlgeordnet werden: $\exists R$ (R ist eine Wohlordnung auf X).*
2. *Es gibt eine Funktion $f\colon (\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}) \to X$ so dass fuer jedes $Y \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$, $f(Y) \in Y$.*

10. Ordinalzahlexponentiation

Uebung 9
Sei α Ordinalzahl. Zeige: Es gibt ein groesstes δ so dass $\omega^\delta \leq \alpha$.

Uebung 10 *Sei α Ordinalzahl und δ maximal so dass $\omega^\delta \leq \alpha$. Dann gibt es ein groesstes $n < \omega$ so dass $\omega^\delta \cdot n \leq \alpha$.*

Uebung 11 *Zeige: Ist $\alpha = \omega^\delta$ und $\beta < \alpha$, so gibt es $\beta_1 < \delta$ und $k \in \omega$ so dass $\beta < \omega^{\beta_1} \cdot k$.*

Uebung 12 *Sei α Limesordinalzahl. Zeige dass die folgenden Aussagen aequivalent sind:*

1. $\forall \beta, \gamma < \alpha\ (\beta + \gamma < \alpha)$.
2. $\forall \beta < \alpha\ (\beta + \alpha = \alpha)$.
3. $\exists \delta\ (\alpha = \omega^\delta)$.

Hinweis: Zeige 1 $\iff$ 2 und 1 $\iff$ 3.

Bemerkung: Ordinalzahlen von der Form ω^δ heissen unzerlegbar.

Uebung 13 (Der Cantorsche Normalformsatz)
Zeige: Jede Ordinalzahl $\alpha \neq \emptyset$ kann in der Form

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot l_1 + \ldots + \omega^{\beta_n} \cdot l_n$$

dargestellt werden, wobei $1 \leq n < \omega$, $\alpha \geq \beta_1 > \ldots > \beta_n \geq 0$ und $1 \leq l_i < \omega$ fuer $i = 1, \ldots n$.