Rekursive Definitionen / Ordinalzahlarithmetik

Uebung 1 *Zeige: Ordinalzahladdition kann rekursiv auch folgendermassen (aequivalent zur nichtrekursiven Definition) definiert werden:*

- $\alpha + 0 = \alpha$,
- $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$,
- $\alpha + \gamma = \bigcup\{\alpha + \beta \colon \beta < \gamma\}$ *fuer Limesordinalzahlen* γ.

Uebung 2 *Zeige: Ordinalzahlmultiplikation kann rekursiv auch folgendermassen (aequivalent zur nichtrekursiven Definition) definiert werden:*

- $\alpha \cdot 0 = 0$,
- $\alpha \cdot (\beta + 1) = (\alpha \cdot \beta) + \alpha$,
- $\alpha \cdot \gamma = \bigcup\{\alpha \cdot \beta \colon \beta < \gamma\}$ *fuer Limesordinalzahlen* γ.

Uebung 3 *Gilt* $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$*?*

Uebung 4 *Zeige: Ordinalzahlexponentiation kann nichtrekursiv auch folgendermassen (aequivalent zur rekursiven Definition) definiert werden: Definiere eine Funktion* F *durch*

$$F(\alpha, \beta) = \{f \colon \beta \to \alpha \colon |\{\xi \colon f(\xi) \neq 0\}| < \omega\}.$$

$F(\alpha, \beta)$ *ist also die Menge aller Funktionen mit Definitionsbereich* β *und Bildbereich* α, *die alle bis auf endlich viele Ordinalzahlen auf* 0 *abbilden.*

Fuer $f, g \in F(\alpha, \beta)$, *definieren wir (fuer* $f \neq g$*):* $f \lhd g$ *genau dann wenn* $f(\xi) < g(\xi)$ *wobei* ξ *die groesste Ordinalzahl mit* $f(\xi) \neq g(\xi)$ *ist.*

Zeige: $\lhd$ *ist eine Wohlordnung auf* $F(\alpha, \beta)$ *und*

$$\alpha^\beta = \mathrm{type}(\langle F(\alpha, \beta), \lhd \rangle).$$

Der transitive Abschluss

Uebung 5 *Zeige: Fuer jedes* x *gibt es ein kleinstes transitives* $y \supseteq x$.

Bemerkung:
Ein solches y heisst transitiver Abschluss von x, wir schreiben $y = \mathrm{trcl}(x)$.

Uebung 6 *Finde eine Menge* x *so dass* $|x| < |\,\mathrm{trcl}(x)|$.

Definition 1 *Eine Menge* x *heisst hereditaer endlich wenn* $|\,\mathrm{trcl}(x)| < \omega$. H_ω *bezeichnet die Menge der hereditaer endlichen Mengen.*

$V_\omega = \bigcup_{n<\omega} \mathcal{P}^n(\emptyset)$, *wobei* $\mathcal{P}(x) = \mathcal{P}^1(x)$ *die Potenzmenge von* x *bezeichnet, und wir rekursiv definieren:* $\mathcal{P}^0(x) = x$. $\mathcal{P}^{n+1}(x) = \mathcal{P}(\mathcal{P}^n(x))$.

Uebung 7 *Zeige:* $H_\omega = V_\omega$.