1 Kardinalzahlexponentiation

Uebung 1.1 *κ^λ bezeichne (nur) in dieser Aufgabe die Ordinalzahlexponentiation. Zeige: $|\kappa^\lambda| = \max(\kappa, \lambda)$ fuer alle unendlichen Kardinalzahlen κ und alle $\lambda > 0$.*

Hinweis:
Zeige mittels transfiniter Induktion nach α, dass $|\kappa^\alpha| = \max(\kappa, |\alpha|)$.

Uebung 1.2 *Zeige: Fuer unendliche Kardinalzahlen $\lambda \leq \kappa$ gilt*

$$|\{X \subseteq \kappa \colon |X| = \lambda\}| = \kappa^\lambda.$$

Hier und im folgenden bezeichnet κ^λ immer die Kardinalzahlexponentiation.

Uebung 1.3 *Seien κ und λ unendliche Kardinalzahlen. Gibt es $\mu < \kappa$ mit $\mu^\lambda \geq \kappa$, dann ist $\kappa^\lambda = \mu^\lambda$.*

Definition 1.1
A ist beschraenkt in κ wenn es ein $\alpha < \kappa$ gibt mit $A \cap \kappa \subseteq \alpha$.

Uebung 1.4 *Zeige: Ist $\mathrm{cf}(\kappa) > \lambda$ und ist f eine Funktion mit $\mathrm{dom}(f) = \lambda$, dann ist $\mathrm{range}(f)$ beschraenkt in κ. $\mathrm{dom}(f)$ bezeichnet den Definitionsbereich von f, $\mathrm{range}(f)$ bezeichnet das Bild von f.*

Uebung 1.5 *Zeige: Ist κ Limeskardinalzahl und $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$, dann ist $\kappa^\lambda = \sup\{\delta^\lambda \colon \delta < \kappa\}$.*

Hinweis: Verwende Uebung 1.4.

Uebung 1.6 *Nimm an dass* GCH *gilt. Zeige dass dann die schwach unerreichbaren (weakly innaccessible) Kardinalzahlen genau die stark unerreichbaren (strongly inaccessible) Kardinalzahlen sind.*

Uebung 1.7 *Nimm and dass* GCH *gilt. Zeige:*

- *Fuer alle unendlichen Kardinalzahlen κ gilt: $2^{<\kappa} = \kappa$.*
- *Fuer alle regulaeren Kardinalzahlen κ gilt: $\kappa^{<\kappa} = \kappa$.*
- *Fuer alle singulaeren Kardinalzahlen κ gilt: $\kappa^{<\kappa} = \kappa^+$.*

Uebung 1.8 *Zeige (ohne* GCH *anzunehmen):*

- *Ist κ stark unerreichbar, so ist $\kappa^{<\kappa} = 2^{<\kappa} = \kappa$.*
- *Ist κ schwach unerreichbar, so ist $\kappa^{<\kappa} = 2^{<\kappa}$.*

Hinweis: Beachte zuerst, dass fuer jede unendliche Kardinalzahl κ offensichtlich $\kappa^{<\kappa} \geq 2^{<\kappa} \geq \kappa$ gilt. Beweise mit Hilfe von Uebung 1.5 $\kappa^{<\kappa} \leq \kappa$.

Ist im zweiten Punkt κ nun ("zufaellig") stark unerreichbar, so sind wir nach dem ersten Punkt fertig. Nimm also an, κ ist schwach unerreichbar, aber nicht stark unerreichbar, das heisst es gibt ein $\delta < \kappa$ mit $2^\delta \geq \kappa$.

Uebung 1.9 *Ist κ regulaer und $\lambda < \kappa$ dann ist*

$$\kappa^\lambda = \kappa \otimes \sup\{\delta^\lambda : \delta \textit{ is a cardinal below } \kappa\}.$$

Hinweis: Zeige zuerst dass fuer jede Ordinalzahl α und jede unendliche Kardinalzahl λ gilt:

$$|{}^\lambda\alpha| = \left|{}^\lambda|\alpha|\right| = |\alpha|^\lambda.$$

Verwende dann Uebung 1.4.

Uebung 1.10 *(Die Hausdorff-Formel)*
Zeige: Fuer alle unendlichen Kardinalzahlen κ und λ gilt:

$$(\kappa^+)^\lambda = \kappa^\lambda \otimes \kappa^+.$$

Hinweis: Unterscheide die Faelle $\lambda \geq \kappa^+$ und $\lambda < \kappa^+$. Beachte im 2. Fall dass κ^+ stets regulaer ist und verwende Uebung 1.9.