Kofinalitaeten

Uebung 1 *Zeige: Ist* $\mathrm{cf}(\alpha) < \mathrm{cf}(\beta)$*, dann gibt es keine streng monoton steigende, kofinale Funktion von* α *nach* β*.*

Uebung 2 *Zeige: Ist* $\mathrm{cf}(\alpha) > \mathrm{cf}(\beta)$*, dann gibt es keine streng monoton steigende, kofinale Funktion von* α *nach* β*.*

Hinweis: Nimm an f sei eine solche Funktion. Dann gibt es auch eine streng monoton steigende, kofinale Funktion g von $\mathrm{cf}(\alpha)$ nach β. Sei h eine streng monoton steigende, kofinale Funktion von $\mathrm{cf}(\beta)$ nach β. Definiere eine Funktion F von $\mathrm{cf}(\beta)$ nach $\mathrm{cf}(\alpha)$ folgendermassen:

$$F(i) = \min\{j \colon h(i) > g(j)\}.$$

Zeige dass F eine kofinale Funktion von $\mathrm{cf}(\beta)$ nach $\mathrm{cf}(\alpha)$ ist und ueberlege, warum das einen Widerspruch ergibt.

Uebung 3 *Zeige: Es gibt keine streng monoton steigende, kofinale Funktion von* ω_ω *nach* $\omega_\omega + \omega$*, also gilt die Umkehrung von Uebung 1 und 2 nicht.*

Kardinalzahlexponentiation

Uebung 4 *Zeige: Gilt* CH*, dann ist fuer* $1 \leq n < \omega$

$${\omega_n}^\omega = \omega_n.$$

Wohlordnungen

Uebung 5 *Zeige: Ist* κ *unendliche Kardinalzahl und* $\triangleleft$ *eine beliebige Wohlordnung auf* κ*, dann gibt es* $X \subseteq \kappa$ *mit* $|X| = \kappa$ *so dass* $\triangleleft$ *und* $<$ *auf* X *uebereinstimmen, wobei* $<$ *die normale* $\in$*-Wohlordnung von* κ *bezeichnet. Ueberlege dir ein Beispiel einer Totalordnung (nicht-Wohlordnung)* $\triangleleft$*, fuer die obige Aussage nicht zutrifft.*