Unendliche Summen und Produkte

Definition 1
Sei $(\kappa_i \colon i \in I)$ *eine Familie von Kardinalzahlen. Sei* $(X_i \colon i \in I)$ *eine Familie paarweise disjunkter Mengen so dass* $|X_i| = \kappa_i$ *fuer* $i \in I$. *Wir definieren*

$$\sum_{i \in I} \kappa_i = \left| \bigcup_{i \in I} X_i \right|.$$

Weiters definieren wir

$$\prod_{i \in I} X_i = \{f \colon \operatorname{dom}(f) = I \text{ and } f(i) \in X_i \text{ for each } i \in I\}$$

und setzen

$$\prod_{i \in I} \kappa_i = \left| \prod_{i \in I} X_i \right|.$$

Uebung 1 *Ueberlege, warum obige Definitionen sinnvoll (z.B. wohldefiniert) sind und warum sie die Summe und das Produkt von zwei Kardinalzahlen verallgemeinern.*

Uebung 2 *Zeige:* $\sum_{i<\lambda} \kappa_i = \lambda \cdot \sup_{i<\lambda} \kappa_i$.

Uebung 3 *Zeige:* $\prod_{i \in I} {\kappa_i}^{\lambda} = \left(\prod_{i \in I} \kappa_i\right)^{\lambda}$.

Uebung 4 *Zeige:* $\prod_{i \in I} \kappa^{\lambda_i} = \kappa^{\sum_{i \in I} \lambda_i}$.

Uebung 5 *Zeige: Ist* $I = \bigcup_{j \in J} A_j$, *dann ist* $\prod_{i \in I} \kappa_i = \prod_{j \in J} \prod_{i \in A_j} \kappa_i$.

Uebung 6 *Zeige: Ist* $\kappa_i \geq 2$ *fuer jedes* $i \in I$, *so ist* $\sum_{i \in I} \kappa_i \leq \prod_{i \in I} \kappa_i$.

Uebung 7 *Zeige: Ist* λ *unendliche Kardinalzahl und* $\langle \kappa_i \colon i < \lambda \rangle$ *monoton steigende Folge von Kardinalzahlen,* $\kappa_0 \neq 0$, *dann ist*

$$\prod_{i<\lambda} \kappa_i = \left(\sup_{i<\lambda} \kappa_i \right)^{\lambda}.$$

Hinweis: Zerlege λ als $\lambda = \bigcup_{i<\lambda} A_i$ mit disjunkten A_i der Maechtigkeit (jeweils) λ und verwende Uebung 5.

Uebung 8 *Berechne* $\prod_{n \in \omega} n$ *und* $\prod_{n \in \omega} \omega_n$.

Uebung 9 (Koenig's Lemma) *Zeige: Ist* $\kappa_i < \lambda_i$ *fuer jedes* $i \in I$, *so ist*

$$\sum_{i \in I} \kappa_i < \prod_{i \in I} \lambda_i.$$

Hinweis: Nimm (fuer einen Widerspruch) an dass $\prod_{i\in I}\lambda_i = \bigcup_{i\in I} A_i$ mit $|A_i| = \kappa_i$ fuer jedes $i \in I$. Jedes $f \in A_i$ ist eine Funktion mit $\mathrm{dom}(f) = I$ und fuer jedes $i \in I$, $f(i) \in \lambda_i$. Sei fuer jedes $i \in I$ $S_i = \{f(i) \colon f \in A_i\}$.

- Zeige: S_i ist echte Teilmenge von λ_i.
- Definiere $f \in \prod_{i\in I}\lambda_i$ so dass fuer jedes $i \in I$ $f(i) \notin S_i$.
- Zeige: $f \notin \bigcup_{i\in I} A_i$.

Uebung 10 *Zeige $\kappa < 2^\kappa$ mit Hilfe von Koenig's Lemma.*

Uebung 11 *Zeige $\kappa^{\mathrm{cof}\,\kappa} > \kappa$ mit Hilfe von Koenig's Lemma.*

Hinweis: Verwende eine kofinale (in κ) Folge $\langle \kappa_i \colon i < \mathrm{cof}\,\kappa\rangle$.