1 Die Axiome von ZFC

Uebung 1.1 *Zeige: Wenn* $\{u, a\} = \{u, b\}$*, dann ist* $a = b$*.*

Beachte: Bei der Mengenschreibweise sind mehrfache Aufzaehlungen des selben Elements moeglich, machen aber fuer die Menge keinen Unterschied; ebenso macht die Reihenfolge der Aufzaehlung keinen Unterschied - also ist etwa $\{1, 1\} = \{1\}$ oder $\{1, 2, 3, 1\} = \{2, 1, 3\}$.

Uebung 1.2 *Das geordnete Paar von* x *und* y *ist definiert als*

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Zeige: $(x, y) = (x', y')$ *impliziert* $x = x'$ *und* $y = y'$*.*

Uebung 1.3 *Man finde eine Formel* φ *in* $\mathcal{L}(\in)$ *so dass* $\varphi(z)$ *gilt genau dann wenn* z *ein geordnetes Paar ist.* $\mathcal{L}(\in)$ *bezeichnet dabei die Sprache der Mengenlehre mit der* $\in$*-Relation.*

Hinweis: Finde zuerst Formeln ψ_0 und ψ_1 so dass $\psi_0(a, b) \iff a = \{b\}$ und $\psi_1(a, b, c) \iff a = \{b, c\}$. Setze daraus die gesuchte Formel zusammen.

Uebung 1.4 *Definiere das geordnete Paar folgendermassen:*

$$(x, y) = \{x, \{y\}\}.$$

Funktioniert das? Gilt eine Analogie zu Uebung 1.2?

Uebung 1.5 *Definiere das geordnete Paar folgendermassen:*

$$(x, y) = \{\{\{x\}, \emptyset\}, \{\{y\}\}\}.$$

Funktioniert das? Gilt eine Analogie zu Uebung 1.2?

Bemerkung: $\emptyset$ bezeichnet die leere Menge.

Uebung 1.6 *Versuche eine geeignete Definition fuer ein geordnetes Tripel zu finden und zeige (aehnlich zu Uebung 1.2) dass aus dem geordneten Tripel eindeutig dessen Komponenten rekonstruiert werden koennen (also dass aus* $(x, y, z) = (x', y', z')$ *folgt, dass* $x = x'$*,* $y = y'$*,* $z = z'$*).*

Uebung 1.7 *Eine staerkere Version des Ersetzungsschemas ist das folgende Schema, das fuer jedes* $\varphi \in \mathcal{L}(\in)$ *in dem* Y *nicht frei auftritt den universellen Abschluss folgenden Satzes beinhaltet:*

$$\forall x \in A\, \exists! y\ \varphi(x, y) \ \rightarrow\ \exists Y\, (\forall x \in A\, \exists y \in Y\ \varphi(x, y) \wedge \forall y \in Y\, \exists x \in A\ \varphi(x, y)).$$

Zeige dass diese staerkere Form des Ersetzungsschemas aus dem schwaecheren Ersetzungsschema zusammen mit dem Aussonderungsschema (comprehension) folgt.

Uebung 1.8 *Zeige dass das Aussonderungsschema aus der staerkeren Form des Ersetzungsschemas (Uebung 1.7) zusammen mit dem Axiom von der Existenz der leeren Menge* $(\exists x \, \forall y \; \neg(y \in x))$ *und den uebrigen ZFC-Axiomen (ohne dem Aussonderungsschema) folgt.*

Hinweis: Betrachte eine spezielle Instanz des Aussonderungsschemas, welche fuer gegebenes z und φ die Existenz der Menge $y = \{x \colon x \in z \wedge \varphi(x)\}$ postuliert. Unterscheide die Faelle $y = \emptyset$ und $y \neq \emptyset$. Wenn $y \neq \emptyset$, fixiere ein $a \in y$ und setze $\psi(x, y) \iff (\varphi(x) \wedge x = y) \vee (\neg\varphi(x) \wedge y = a)$.

Uebung 1.9 *Definiere das geordnete Paar folgendermassen:*

$$(x, y) = \{x, \{x, y\}\}.$$

Funktioniert das? Gilt eine Analogie zu Uebung 1.2?

Hinweis: Benutze das Fundierungsaxiom (Axiom of Foundation).