Relationen und Funktionen

Uebung 1 *Fuer eine beliebige Relation R gilt* $\mathrm{dom}(R^{-1}) = \mathrm{range}(R)$ *und* $\mathrm{range}(R^{-1}) = \mathrm{dom}(R)$.

Uebung 2 *Ist eine Funktion f injektiv, so ist f^{-1} eine injektive Funktion.*

Uebung 3 *Ist $f\colon A \to B$ injektiv, so gibt es $g\colon B \to A$ surjektiv (ohne Verwendung des Auswahlaxioms).*

Uebung 4 *Ist $f\colon A \to B$ surjektiv, so gibt es $g\colon B \to A$ injektiv (dieser Beweis benoetigt das Auswahlaxiom - ueberlege, wo genau du es verwendest; ueberlege auch, warum man das Auswahlaxiom nicht benoetigt, wenn etwa A eine Teilmenge der natuerlichen Zahlen ist).*

Uebung 5 *Seien f und g Funktionen. Wann ist $f \cup g$ eine Funktion? Gib eine notwendige und hinreichende Bedingung an.*

Bemerkung: $f \cup g$ bezeichnet die Vereinigungsmenge von f und g.

Uebung 6 *Folgt aus $A \times B = C \times D$ dass $A = C$ und $B = D$?*

Wohlordnungen

Uebung 7 *Zeige: Ist $\langle W, < \rangle$ eine Wohlordnung so gibt es keine unendlich absteigende Folge in W, also keine Folge $\langle a_i \colon i \in \mathbb{N} \rangle$ mit $a_0 > a_1 > a_2 > \ldots$, wobei $x > y$ genau dann wenn $y < x$ ($>$ bezeichnet die umgekehrte Ordnung).*

Uebung 8 *Sei $\langle W, < \rangle$ eine Wohlordnung und sei $f\colon W \to W$ eine streng monoton steigende Funktion (also $x < y \to f(x) < f(y)$). Zeige: dann gilt $f(x) \geq x$ fuer alle $x \in W$, wobei $x \geq y$ genau dann wenn $x > y$ oder $x = y$.*

Ordinalzahlen

Uebung 9 *Das Unendlichkeitsaxiom (axiom of infinity) ist aequivalent (modulo der restlichen ZFC-Axiome) zur Existenz einer Limesordinalzahl.*

Uebung 10 *Zeige: Zu jeder Ordinalzahl α gibt es eine groessere Limesordinalzahl β.*