Kofinalitaeten und Kardinalzahlexponentiation

Uebung 1 *Zeige: Es gibt keine streng monoton steigende, kofinale Funktion von ω_ω nach $\omega_\omega + \omega$, also gilt die Umkehrung von Lemma I, 10.32 aus Kunen's Buch nicht.*

Uebung 2 *κ^λ bezeichne (nur) in dieser Aufgabe die Ordinalzahlexponentiation. Zeige: $|\kappa^\lambda| = \max(\kappa, \lambda)$ fuer alle unendlichen Kardinalzahlen κ und alle $\lambda > 0$.*

Hinweis:
Zeige mittels transfiniter Induktion nach α, dass $|\kappa^\alpha| = \max(\kappa, |\alpha|)$.

Uebung 3 *Zeige: Fuer unendliche Kardinalzahlen $\lambda \leq \kappa$ gilt*

$$|\{X \subseteq \kappa \colon |X| = \lambda\}| = \kappa^\lambda.$$

Hier und im folgenden bezeichnet κ^λ immer die Kardinalzahlexponentiation.

Uebung 4 *Seien κ und λ unendliche Kardinalzahlen. Gibt es $\mu < \kappa$ mit $\mu^\lambda \geq \kappa$, dann ist $\kappa^\lambda = \mu^\lambda$.*

Definition 1
A ist beschraenkt in κ wenn es ein $\alpha < \kappa$ gibt mit $A \cap \kappa \subseteq \alpha$.

Uebung 5 *Zeige: Ist $\mathrm{cf}(\kappa) > \lambda$ und ist f eine Funktion mit $\mathrm{dom}(f) = \lambda$, dann ist $\mathrm{range}(f)$ beschraenkt in κ. $\mathrm{dom}(f)$ bezeichnet den Definitionsbereich von f, $\mathrm{range}(f)$ bezeichnet das Bild von f.*

Uebung 6 *Zeige: Ist κ Limeskardinalzahl und $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$, dann ist*

$$\kappa^\lambda = \sup\{\delta^\lambda \colon \delta < \kappa\}.$$

Hinweis: Verwende Uebung 5.

Uebung 7 *Ist κ regulaer und $\lambda < \kappa$ dann ist*

$$\kappa^\lambda = \kappa \otimes \sup\{\delta^\lambda \colon \delta \textit{ is a cardinal below } \kappa\}.$$

Hinweis: Zeige zuerst dass fuer jede Ordinalzahl α und jede unendliche Kardinalzahl λ gilt:

$$|{}^\lambda\alpha| = \left|{}^\lambda|\alpha|\right| = |\alpha|^\lambda.$$

Verwende dann Uebung 5.

Uebung 8 *(Die Hausdorff-Formel)*
Zeige: Fuer alle unendlichen Kardinalzahlen κ und λ gilt:

$$(\kappa^+)^\lambda = \kappa^\lambda \otimes \kappa^+.$$

Hinweis: Unterscheide die Faelle $\lambda \geq \kappa^+$ und $\lambda < \kappa^+$. Beachte im 2. Fall dass κ^+ stets regulaer ist und verwende Uebung 7.

Uebung 9 *Nimm and dass* GCH *gilt. Zeige:*

- *Fuer alle unendlichen Kardinalzahlen κ gilt:* $2^{<\kappa} = \kappa$.
- *Fuer alle regulaeren Kardinalzahlen κ gilt:* $\kappa^{<\kappa} = \kappa$.
- *Fuer alle singulaeren Kardinalzahlen κ gilt:* $\kappa^{<\kappa} = \kappa^+$.

Uebung 10 *Zeige (ohne* GCH *anzunehmen):*

- *Ist κ stark unerreichbar, so ist* $\kappa^{<\kappa} = 2^{<\kappa} = \kappa$.
- *Ist κ schwach unerreichbar, so ist* $\kappa^{<\kappa} = 2^{<\kappa}$.

Hinweis: Ist im zweiten Punkt κ "zufaellig" stark unerreichbar, so sind wir nach dem ersten Punkt fertig. Nimm also an, κ ist schwach unerreichbar, aber nicht stark unerreichbar, das heisst es gibt ein $\delta < \kappa$ mit $2^\delta \geq \kappa$.