

Praedikatenkalkuel

Exercise 1 Zeige, dass sich jedes Endstueck eines Terms eindeutig als eine Folge von Termen schreiben laesst. Gilt das auch fuer ein Mittelstueck (ein Mittelstueck entsteht aus einem Term indem man ein Anfangsstueck und ein Endstueck weglaesst)?

Exercise 2 Eine Teilformel von ϕ ist ein zusammenhaengendes Teilstueck von ϕ , das selbst eine Formel ist. Zeige, dass alle Teilformeln von ϕ im rekursiven Aufbau von ϕ vorkommen muessen. Das heisst:

- Eine Primformel hat keine echten Teilformeln.
- Eine echte Teilformel von $\neg\phi$ ist eine Teilformel von ϕ .
- Eine echte Teilformel von $(\phi_1 \wedge \phi_2)$ ist eine Teilformel von ϕ_1 oder ϕ_2 .
- Eine echte Teilformel von $\exists x\phi$ ist eine Teilformel von ϕ .

Exercise 3 Sei \mathcal{A} eine L -Struktur mit Grundmenge A . Ein Automorphismus ist ein Isomorphismus von \mathcal{A} mit sich selbst. Zeige: Ist A endlich, so gibt es auf der Grundmenge A genau

$$\frac{\text{Anzahl der Permutationen von } A}{\text{Anzahl der Automorphismen von } \mathcal{A}}$$

L -Strukturen, die isomorph zu \mathcal{A} sind.

Definition 1 Sei \mathcal{A} eine L -Struktur und B eine nicht-leere Teilmenge von A (dem Universum von \mathcal{A}), die die Interpretationen $c^{\mathcal{A}}$ aller Konstanten enthaelt und unter allen Operationen $f^{\mathcal{A}}$ abgeschlossen ist. Wenn man die Interpretation der Zeichen aus L auf B einschraenkt erhaelt man eine L -Struktur \mathcal{B} . Man nennt \mathcal{B} eine Unterstruktur von \mathcal{A} .

Exercise 4 Zeige, dass der Durchschnitt einer Familie von Universen von Unterstrukturen von \mathcal{A} entweder leer ist oder wieder Universum einer Unterstruktur von \mathcal{A} . Zeige dass daraus folgt, dass jede Teilmenge S von A in einer kleinsten Unterstruktur von \mathcal{A} enthalten ist. Diese nennen wir die von S erzeugte Unterstruktur.

Exercise 5 Sei \mathcal{A} eine L -Struktur und $S \subseteq A$. Zeige: die von S erzeugte Unterstruktur von \mathcal{A} besteht aus allen $t^{\mathcal{A}}[s_0, \dots, s_n]$ fuer $n \in \mathbb{N}$, $s_0, \dots, s_n \in S$ und L -Terme $t(x_0, \dots, x_n)$.

Exercise 6 Man zeige, dass es zu jedem Term $t(x_1, \dots, x_n)$ der Ring-Sprache L_R ein eindeutig bestimmtes Polynom $p(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ gibt, so dass

$$t[a_1, \dots, a_n] = p(a_1, \dots, a_n)$$

fuer alle kommutativen Ringe $R = (R, 0, 1, +, -, \cdot)$ und $a_1, \dots, a_n \in R$.

Definition 2 Eine Boolesche Algebra $(B, 0, 1, \sqcap, \sqcup, ^c)$ ist eine Menge B mit zwei ausgezeichneten Elementen 0 und 1 und Operationen $\sqcap, \sqcup: B^2 \rightarrow B$ und $^c: B \rightarrow B$, fuer die die folgenden Gleichungen gelten:

Idempotenz	$a \sqcap a = a$	$a \sqcup a = a$
Kommutativitaet	$a \sqcap b = b \sqcap a$	$a \sqcup b = b \sqcup a$
Assoziativitaet	$(a \sqcap b) \sqcap c = a \sqcap (b \sqcap c)$	$(a \sqcup b) \sqcup c = a \sqcup (b \sqcup c)$
Absorption	$a \sqcap (a \sqcup b) = a$	$a \sqcup (a \sqcap b) = a$
Distributivitaet	$a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c)$	$a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$
Null und Eins	$0 \sqcap a = 0$	$1 \sqcup a = 1$
Komplement	$a \sqcap a^c = 0$	$a \sqcup a^c = 1$

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ einer Menge X wird eine Boolesche Algebra, wenn man fuer 0 die leere Menge, fuer 1 die Menge X , fuer \sqcap und \sqcup Durchschnitt und Vereinigung und fuer c das Komplement in X nimmt.

Exercise 7 In Booleschen Algebren gelten die de Morganschen Regeln:

$$\begin{aligned}(a \sqcap b)^c &= a^c \sqcup b^c \\ (a \sqcup b)^c &= a^c \sqcap b^c \\ (a^c)^c &= a\end{aligned}$$

Exercise 8 Wir nennen zwei aussagenlogische Formeln aequivalent, wenn sie bei allen Belegungen der Variablen den gleichen Wahrheitswert haben. Sei M eine nichtleere Menge von Variablen und $\mathcal{L}(M)$ die Menge der Aequivalenzklassen von aussagenlogischen Formeln in Variablen aus M . Zeige, dass $\mathcal{L}(M)$ eine Boolesche Algebra ist, wenn man fuer 0 die Aequivalenzklasse einer Formel nimmt, die bei allen Belegungen den Wahrheitswert \mathbb{F} hat, etwa $(p \wedge \neg p)$, fuer 1 die Aequivalenzklasse einer allgemeingueltigen Formel, etwa $(p = p)$, fuer \sqcap und \sqcup Konjunktion und Disjunktion und fuer c die Negation.

Hinweis: Sei \mathcal{B} die Menge aller Belegungen $\mu: M \rightarrow \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$. Dann induziert die Abbildung $f \mapsto \{\mu \in \mathcal{B}: \mu(f) = \mathbf{W}\}$ einen Isomorphismus von $\mathcal{L}(M)$ mit einer Unteralgebra von $\mathcal{P}(\mathcal{B})$.

Exercise 9 Zeige, dass jede aussagenlogische Formel äquivalent ist zu einer Formel in disjunktiver Normalform

$$\bigvee_{i=1}^N k_i$$

wobei die k_i Konjunktionen von Variablen und negierten Variablen sind. Dual dazu ist jede Formel auch äquivalent zu einer konjunktiven Normalform

$$\bigwedge_{i=1}^N d_i$$

wobei die d_i Disjunktionen von Variablen und negierten Variablen sind.

Hinweis: Verwende das Distributivgesetz und die de Morganschen Regeln.

Definition 3 Eine Menge von Junktoren J bezeichnen wir als vollständiges Junktorensystem, wenn sich jede Funktion $\mathcal{F}: \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n \rightarrow \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$ durch eine aussagenlogische Formel $f(p_1, \dots, p_n)$ darstellen lässt, welche nur Junktoren aus J verwendet. Dabei lässt sich \mathcal{F} durch f darstellen, genau dann wenn

$$\mathcal{F}(\mu(p_1), \dots, \mu(p_n)) = \mu(f)$$

für alle Belegungen $\mu: \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$.

Exercise 10 Zeige, dass die folgenden Junktorensysteme vollständig sind:

- $\{\wedge, \vee, \neg\}$ (hier wurde natürlich kein Beistrich vergessen),
- $\{\mid\}$, wobei $(f \mid g) = \neg(f \wedge g)$ (\mid wird Shefferscher Strich genannt).