# 1 Die Axiome von ZFC, Teil 2

**Uebung 1.1** *Eine Funktion ist injektiv (1-1) genau dann wenn fuer jedes* $y \in \mathrm{range}(f)$ *ein eindeutiges* $x \in \mathrm{dom}(f)$ *existiert, so dass* $f(x) = y$*. Dabei bezeichnet* $\mathrm{dom}(f)$ *den Definitionsbereich und* $\mathrm{range}(f)$ *das Bild von* $f$*.*

**Hinweis:** Zeige zuerst $\mathrm{dom}(R^{-1}) = \mathrm{range}(R)$ und $\mathrm{range}(R^{-1}) = \mathrm{dom}(R)$ fuer jede Relation $R$.

**Uebung 1.2** *Seien* $f$ *und* $g$ *Funktionen. Wann ist* $f \cup g$ *eine Funktion? Gib eine notwendige und hinreichende Bedingung an.*

**Uebung 1.3** *Zeige: Das kartesische Produkt* $A \times B$ *laesst sich auch ohne Verwendung des Ersetzungsschemas, unter Verwendung insbesondere des Potenzmengenaxioms und des Aussonderungsschemas definieren. Verwende hier wieder die Standarddefinition* $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$*.*

**Hinweis:** $A \times B \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$, wobei $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von $X$, also die Menge aller Teilmengen von $X$ bezeichnet.

**Uebung 1.4** *Folgt aus* $A \times B = C \times D$ *dass* $A = C$ *und* $B = D$*?*
*Beweise die Aussage oder finde ein Gegenbeispiel.*

**Uebung 1.5** *Zeige:* $\mathcal{P}(X) \neq X$*.*

# 2 Wohlordnungen

**Uebung 2.1**
*Zeige die Details im Beweis von Satz 3.1.6 im Vorlesungsskriptum.*

**Hinweis:** Beweise indirekt. Nimm an der Definitionsbereich von $f$ (siehe Vorlesungsskript) ist eine echte Teilmenge von $A$ und der Bildbereich von $f$ ist eine echte Teilmenge von $B$ und fuege jeweils ein geeignetes Element zum Definitions- und Bildbereich von $f$ hinzu um zu einem Widerspruch zu gelangen.

**Uebung 2.2** *Zeige: Ist* $\langle W, <\rangle$ *eine Wohlordnung so gibt es keine unendlich absteigende Folge in* $W$*, also keine Folge* $\langle a_i : i \in \mathbb{N}\rangle$ *mit* $a_0 > a_1 > a_2 > \ldots$*, wobei* $x > y$ *genau dann wenn* $y < x$ *(*$>$ *bezeichnet die umgekehrte Ordnung).*

**Hinweis:** Die Menge $A = \{a_i : i \in \mathbb{N}\}$ hat kein $<$-minimales Element.

**Uebung 2.3** *Sei* $\langle W, <\rangle$ *eine Wohlordnung und sei* $f : W \to W$ *eine streng monoton steigende Funktion (also* $x < y \to f(x) < f(y)$*). Zeige: dann gilt* $f(x) > x$ *fuer alle* $x \in W$*.*

# 3 Ordinalzahlen

**Uebung 3.1** *Zeige die Details im Beweis von Satz 3.2.3, Teil 2 im Vorlesungsskriptum.*

**Hinweis:** Nimm an $f \neq \mathrm{id}$. Sei $\gamma$ minimal so dass $f(\gamma) = \delta \neq \gamma$. Dann gibt es $\eta \in \delta$ so dass $\eta \notin \gamma$ (verwende Satz 3.2.3, Teil 1). Waehle $\bar{\gamma}$ so dass $f(\bar{\gamma}) = \eta$ und versuche zu einem Widerspruch zu gelangen.

**Uebung 3.2** *Beweise Lemma 3.2.5 aus dem Vorlesungsskriptum.*

**Uebung 3.3** *Beweise Lemma 3.2.10 aus dem Vorlesungsskriptum.*

# 4 $\omega$

**Uebung 4.1** *Beweise Lemma 3.3.2 aus dem Vorlesungsskriptum.*

**Uebung 4.2** *Das Unendlichkeitsaxiom (axiom of infinity) ist aequivalent zum Axiom von der Existenz einer Limesordinalzahl, also dem Satz $\exists \alpha\ \alpha$ ist eine Limesordinalzahl.*

**Hinweis:** Es ist einerseits zu zeigen, dass aus den Axiomen von ZFC folgt, dass es eine Limesordinalzahl gibt (zeige, dass $\omega$ Limesordinalzahl ist; Beweisskizze im Vorlesungsskriptum), andererseits dass aus den Axiomen von ZFC ohne Unendlichkeitsaxiom aber mit dem Axiom von der Existenz einer Limesordinalszahl das Unendlichkeitsaxiom folgt (zeige hierfuer, dass jede Limesordinalzahl $x$ die Bedingungen des Unendlichkeitsaxioms erfuellt (also $\emptyset \in x \wedge \forall y \in x\ S(y) \in x$)).