1 Ordinalzahladdition und -multiplikation

Uebung 1.1
Zeige: ξ *ist Limesordinalzahl genau dann wenn* $\forall\zeta\ (\zeta < \xi \ \rightarrow\ \zeta + 1 < \xi)$.

Uebung 1.2 *Zeige: Es gibt beliebig grosse Limesordinalzahlen, also*

$$\forall\beta\,\exists\alpha\ (\alpha > \beta \textit{ und } \alpha \textit{ ist Limesordinalzahl}).$$

Uebung 1.3 *Finde eine Folge* $\langle A_i \colon i \in \omega\rangle$ *so dass* $A_i \subseteq A_j$ *fuer* $i < j$ *in* ω, *aber so dass die folgende Aussage nicht gilt:*

$$\bigcup_{i\in\omega} \operatorname{type}(\langle A_i, \in\rangle) = \operatorname{type}(\langle \bigcup_{i\in\omega} A_i, \in\rangle).$$

Hinweis: Suche eine aufsteigende Folge endlicher Mengen $\langle A_i \colon i < \omega\rangle$ mit $\bigcup_{i\in\omega} A_i = \omega + \omega$.

Uebung 1.4 *Sei* $\alpha < \zeta$. *Dann gibt es ein eindeutiges* δ *mit* $\alpha + \delta = \zeta$.

Uebung 1.5 *Beweise Lemma 3.4.2, 5 aus dem Vorlesungsskriptum:*
Ist β *Limesordinalzahl, so ist* $\alpha + \beta = \sup\{\alpha + \xi \colon \xi < \beta\}$.

Hinweis: Verwende Uebung 1.4, setze $\zeta = \sup\{\alpha + \xi \colon \xi < \beta\}$ und sei δ so dass $\alpha + \delta = \zeta$. Zeige, dass $\delta = \beta$.

2 Klassen

Definition 2.1 *Eine Folge* $\langle \gamma_\alpha \colon \alpha \in \mathbf{ON}\rangle$ *heisst normal, wenn sie streng monoton wachsend und stetig ist, also wenn* $\alpha_0 < \alpha_1 \rightarrow \gamma_{\alpha_0} < \gamma_{\alpha_1}$ *und* $\lim_{\alpha\to\beta} \gamma_\alpha = \gamma_\beta$.

α *heisst ein Fixpunkt der Folge* $\langle \gamma_\alpha \colon \alpha \in \mathbf{ON}\rangle$, *wenn* $\gamma_\alpha = \alpha$.

Uebung 2.2
Zeige: Eine normale Folge $\langle \gamma_\alpha \colon \alpha \in \mathbf{ON}\rangle$ *hat beliebig grosse Fixpunkte.*

Hinweis: Waehle α_0 beliebig und setze $\alpha_{n+1} = \gamma_{\alpha_n}$ fuer $n \in \omega$. Sei $\alpha = \lim_{n\to\omega} \alpha_n$. Zeige: dann ist α Fixpunkt der gegebenen Folge.

Uebung 2.3 *Ist* $\alpha < \beta$, *dann ist auch* $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$, $\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$ *und* $\alpha^\gamma \leq \beta^\gamma$.

Hinweis: Die letzte Aussage muss, die ersten beiden Aussagen koennen mittels transfiniter Induktion (nach γ) bewiesen werden.

Uebung 2.4 *Versuche Beispiele zu finden, so dass im vorherigen Uebungsbeispiel jeweils tatsaechlich Gleichheit gilt.*

3 Ordinalzahlarithmetik, Teil 2

Uebung 3.1 *Zeige die Details im Beweis von Lemma 3.6.2 aus dem Vorlesungsskriptum.*

Uebung 3.2 *Sei α Limesordinalzahl. Zeige, dass die folgenden Aussagen aequivalent sind:*

1. $\forall \beta, \gamma < \alpha \ (\beta + \gamma < \alpha)$.
2. $\forall \beta < \alpha \ (\beta + \alpha = \alpha)$.
3. $\exists \delta \ (\alpha = \omega^\delta)$.

Hinweis: Fuer $1 \to 2$ verwende Uebung 1.5. Fuer $2 \to 1$ beweise zuerst folgende Aussage: $\gamma < \alpha \ \to \ \beta + \gamma < \beta + \alpha$ (diese Aussage gilt fuer beliebige Ordinalzahlen, also auch wenn α keine Limesordinalzahl ist).

Der Beweis von $1 \to 3$ ist sehr aehnlich zum Beweis vom Satz von der Cantor'schen Normalform im Vorlesungsskriptum. Fuer den Beweis von $3 \to 1$ beweise und verwende folgendes Hilfslemma:

Lemma 3.3
Ist $\alpha = \omega^\delta$ und $\beta < \alpha$, so gibt es $\beta_1 < \delta$ und $k \in \omega$ so dass $\beta < \omega^{\beta_1} \cdot k$.

Hinweis fuer das Lemma:
Unterscheide die 2 Faelle δ Nachfolgerordinalzahl und δ Limesordinalzahl oder verwende den Satz von der Cantor'schen Normalform.

Bemerkung: Ordinalzahlen α von der Form $\alpha = \omega^\delta$ heissen unzerlegbar (indecomposable). Die letzte Uebung zeigt sehr schoen die Bedeutung dieser Bezeichnung, da ihrzufolge genau diese Ordinalzahlen nicht in eine Summe zweier kleinerer Ordinalzahlen zerlegbar sind.