1 Kardinalzahlen

Bemerkung: Auch hier bezeichnen κ und λ im Folgenden stets Kardinalzahlen.

Uebung 1.1 *Zeige:* $A \preccurlyeq B$ *genau dann wenn* $|A| \leq |B|$.

Definition 1.2 $\langle W, < \rangle$ *ist eine Halbordnung, wenn:*

- $<$ *ist eine Relation auf* W,
- $\neg\,(a < a)$ *fuer alle* $a \in W$ *und*
- $a < b$ *und* $b < c$ *impliziert* $a < c$ *fuer alle* $a, b, c \in W$.

$a \in W$ *ist bezueglich* $<$ *minimal wenn* $\nexists b \in W \;\; b < a$.
$a \in W$ *ist bezueglich* $<$ *maximal wenn* $\nexists b \in W \;\; b > a$.

Uebung 1.3 *Sei* $\langle W, < \rangle$ *eine Halbordnung und* W *sei endlich. Zeige: Dann hat* W *ein bezueglich* $<$ *minimales und ein bezueglich* $<$ *maximales Element.*

Verwende dies um zu zeigen dass jede Totalordnung auf einer endlichen Menge eine Wohlordnung ist.

Bemerkung: Eine Totalordnung ist eine Halbordnung mit der zusaetzlichen Eigenschaft, dass je zwei Elemente vergleichbar sind (also $a < b$, $b < a$ oder $a = b$ gilt).

Uebung 1.4 *Zeige:*

1. *Jede Teilmenge einer endlichen Menge ist selbst endlich.*
2. *Ist* A *endlich und jedes* $a \in A$ *endlich, so ist* $\bigcup A$ *endlich.*
3. *Ist* A *endlich und* F *eine Funktion mit* $A \subseteq \mathrm{dom}(F)$, *dann ist* $F\,"A = \{F(a) \colon a \in A\}$ *endlich.*

Uebung 1.5 *Zeige: saemtliche Aussagen des letzten Uebungsbeispieles gelten auch, wenn man jeweils "endlich" durch "abzaehlbar" ersetzt.*

Uebung 1.6 *Zeige: Eine Menge* A *ist unendlich genau dann wenn sie eine echte Teilmenge* $B \subsetneq A$ *besitzt, so dass* $B \approx A$.

Uebung 1.7 *Zeige: Wenn* $\kappa < |X|$ *dann gibt es* $Y \subseteq X$ *mit* $|Y| = \kappa$.

Uebung 1.8 *Zeige: Ist* $A \subseteq \alpha$*, dann ist* $\operatorname{type}\langle A, \in\rangle \leq \alpha$.

Hinweis: Verwende hiezu das aeltere Uebungsbeispiel, dass fuer eine streng monotone Funktion F auf einer Wohlordnung W ($\operatorname{dom}(F) = W$, $\operatorname{range}(F) \subseteq W$) gilt, dass $F(x) \geq x$ fuer alle $x \in W$.

Uebung 1.9
Zeige: Ist $A \subseteq \kappa$ *dann ist* $|A| = \kappa$ *genau dann wenn* $\operatorname{type}\langle A, \in\rangle = \kappa$.

2 Kardinalzahlarithmetik

Uebung 2.1
Beweise Punkt 1 des Korollar 4.2.5 aus dem Vorlesungsskriptum.

3 Die $\aleph$-Funktion

Uebung 3.1
Zeige: Fuer alle Ordinalzahlen α *gilt* $\aleph_\alpha \geq \alpha$.
Zeige: Fuer jedes γ *gibt es* $\kappa > \gamma$ *mit* $\kappa = \aleph_\kappa$.

Hinweis: Beweise die erste Aussage mittels transfiniter Induktion.
Fuer die zweite Aussage, setze $\kappa_0 := \gamma^+$ und fuer alle $n \in \omega$ sei $\kappa_{n+1} = \aleph_{\kappa_n}$.
Sei $\kappa_\omega := \bigcup_{n\in\omega} \kappa_n$. Zeige: Dann ist κ_ω wie gesucht.