

# 1 Kardinalzahlexponentiation

**Uebung 1.1**  $\kappa^\lambda$  bezeichne (nur) in dieser Aufgabe die Ordinalzahlexponentiation. Zeige:  $|\kappa^\lambda| = \max(\kappa, \lambda)$  fuer alle unendlichen Kardinalzahlen  $\kappa$  und alle  $\lambda > 0$ . Zeige mit Hilfe dieser Aufgabe weitere Beispiele fuer die Unterschiedlichkeit von Ordinalzahl- und Kardinalzahlexponentiation.

**Hinweis:**

Zeige mittels transfiniten Induktion nach  $\lambda$ , dass  $|\kappa^\lambda| = \max(\kappa, |\lambda|)$ .

**Uebung 1.2** Nimm an dass GCH gilt. Zeige dass dann die schwach unerreichbaren (weakly inaccessible) Kardinalzahlen genau die stark unerreichbaren (strongly inaccessible) Kardinalzahlen sind.

**Uebung 1.3**

Beweise die Bemerkung nach Definition 4.5.15 im Vorlesungsskriptum.

**Achtung:** Im Folgenden schreibe ich  $\kappa^{<\lambda}$  auch statt  $|\kappa^{<\lambda}|$ , analog fuer  $2^{<\kappa}$ ,  $\kappa^{<\kappa}$  und aehnliche Ausdruecke, die eigentliche Bedeutung ergibt sich jeweils aus dem Kontext; das ist auch die Standardnotation in der Literatur.

**Uebung 1.4** Nimm and dass GCH gilt. Zeige:

- Fuer alle unendlichen Kardinalzahlen  $\kappa$  gilt:  $2^{<\kappa} = \kappa$ .
- Fuer alle regulaeren Kardinalzahlen  $\kappa$  gilt:  $\kappa^{<\kappa} = \kappa$ .
- Fuer alle singulaeren Kardinalzahlen  $\kappa$  gilt:  $\kappa^{<\kappa} = \kappa^+$ .

**Definition 1.1**

$A \subseteq \kappa$  heisst beschaenkt (in  $\kappa$ ) wenn es ein  $\alpha < \kappa$  gibt mit  $A \subseteq \alpha$ .

**Uebung 1.5** Zeige: Ist  $\text{cf}(\kappa) > \lambda$  und ist  $f$  eine Funktion mit  $\text{dom}(f) = \lambda$  und  $\text{range}(f) \subseteq \kappa$ , dann ist  $\text{range}(f)$  beschaenkt in  $\kappa$ .

**Uebung 1.6** Zeige: Ist  $\kappa$  Limeskardinalzahl und  $\lambda < \text{cf}(\kappa)$ , dann ist  $\kappa^\lambda = \sup\{\delta^\lambda : \delta < \kappa\}$ .

**Hinweis:** Verwende Uebung 1.5.

**Uebung 1.7** Seien  $\kappa$  und  $\lambda$  unendliche Kardinalzahlen. Gibt es  $\mu < \kappa$  mit  $\mu^\lambda \geq \kappa$ , dann ist  $\kappa^\lambda = \mu^\lambda$ .

**Uebung 1.8** Zeige (ohne GCH anzunehmen):

- Ist  $\kappa$  stark unerreichbar, so ist  $\kappa^{<\kappa} = 2^{<\kappa} = \kappa$ .
- Ist  $\kappa$  schwach unerreichbar, so ist  $\kappa^{<\kappa} = 2^{<\kappa}$ .

**Hinweis:** Beachte zuerst, dass fuer jede unendliche Kardinalzahl  $\kappa$  offensichtlich  $\kappa^{<\kappa} \geq 2^{<\kappa} \geq \kappa$  gilt. Beweise mit Hilfe von Uebung 1.6  $\kappa^{<\kappa} \leq \kappa$ .

Ist im zweiten Punkt  $\kappa$  nun ("zufaellig") stark unerreichbar, so sind wir nach dem ersten Punkt fertig. Nimm also an,  $\kappa$  ist schwach unerreichbar, aber nicht stark unerreichbar, das heisst es gibt ein  $\delta < \kappa$  mit  $2^\delta \geq \kappa$ .

**Uebung 1.9** *Ist  $\kappa$  regulaer und  $\lambda < \kappa$  dann ist*

$$\kappa^\lambda = \kappa \otimes \sup\{\delta^\lambda : \delta \text{ is a cardinal below } \kappa\}.$$

**Hinweis:** Zeige zuerst dass fuer jede Ordinalzahl  $\alpha$  und jede unendliche Kardinalzahl  $\lambda$  gilt:

$$|\lambda|^\alpha = |\lambda|^{|\alpha|} = |\alpha|^\lambda.$$

Verwende dann Uebung 1.5.

**Uebung 1.10** *(Die Hausdorff-Formel)*

*Zeige: Fuer alle unendlichen Kardinalzahlen  $\kappa$  und  $\lambda$  gilt:*

$$(\kappa^+)^{\lambda} = \kappa^{\lambda} \otimes \kappa^+.$$

**Hinweis:** Unterscheide die Faelle  $\lambda \geq \kappa^+$  und  $\lambda < \kappa^+$ . Beachte im 2. Fall dass  $\kappa^+$  stets regulaer ist und verwende Uebung 1.9.