1 Diverses

Uebung 1.1 *Zeige:*

- $\mathrm{cf}(\alpha) = \beta \iff$
  β *ist minimal so dass* $\exists \langle \alpha_i : i < \beta \rangle$ *mit* $\forall i < \beta\ \alpha_i < \alpha \wedge \bigcup_{i<\beta} \alpha_i = \alpha$.

- *Ist* κ *Kardinalzahl, so ist* $\mathrm{cf}(\kappa) = \lambda \iff$
  λ *ist minimal so dass* $\exists \langle A_i : i < \lambda \rangle$ *mit*
  $\forall i\ A_i \subseteq \kappa$, $|A_i| < \kappa$ *und* $\bigcup_{i<\lambda} A_i = \kappa$.

Hinweis: Der zweite Punkt folgt direkt aus dem ersten.

Uebung 1.2 *Zeige: Sind* $\lambda \leq \kappa$ *unendliche Kardinalzahlen, so ist*

$$|\{X \subseteq \kappa : |X| = \lambda\}| = \kappa^{\lambda}.$$

2 Wohlfundierte Mengen

Uebung 2.1 *Zeige: Jede Klasse* $\mathbf{A}$ *fuer die* $x \subseteq \mathbf{A} \to x \in \mathbf{A}$ *gilt, enthaelt* $\mathbf{WF}$ *als Teilmenge (also* $\mathbf{WF} \subseteq \mathbf{A}$*, bzw. genauer: ist* $\varphi_{\mathbf{WF}}$ *die definierende Formel fuer* $\mathbf{WF}$ *und ist* $\varphi_{\mathbf{A}}$ *die definierende Formel fuer* $\mathbf{A}$*, dann gilt* $\forall x\ \varphi_{\mathbf{WF}}(x) \to \varphi_{\mathbf{A}}(x)$*).*

Hinweis: $\emptyset \subseteq \mathbf{A}$.

Uebung 2.2 *Fuer welche* α *ist* $|R_\alpha| = \beth_\alpha$*?*

Uebung 2.3 *Zeige: Ist* κ *stark unerreichbar, so ist* $|R_\kappa| = \kappa$.
Gibt es nicht unerreichbare κ *mit dieser Eigenschaft?*

Uebung 2.4 *Sei* $\in$ *extensional auf* $\mathbf{A}$*. Sei* $\mathbf{G}$ *die eindeutig bestimmte Funktion die* $\mathbf{A}$ *bijektiv auf die transitive Klasse* $\mathbf{M}$ *abbildet. Zeige:*

- *Ist* $\emptyset \in \mathbf{A}$*, dann ist* $\mathbf{G}(\emptyset) = \emptyset$.
- *Ist* $\alpha + 1 \subseteq \mathbf{A}$*, dann ist* $\mathbf{G}(\alpha) = \alpha$.
- *Ist* $\alpha \subseteq \mathbf{A}$*,* $x \subseteq \alpha$ *und* $x \in \mathbf{A}$*, dann ist* $\mathbf{G}(x) = x$.
- *Ist* $Y \subseteq \mathbf{A}$ *transitiv,* $x \subseteq Y$ *und* $x \in \mathbf{A}$*, dann ist* $\mathbf{G}(x) = x$.

Wann ist $\mathbf{G} = \mathrm{id}\restriction\mathbf{A}$*? Gib eine notwendige und hinreichende Bedingung an.*