1 Kardinalzahlarithmetik und Kofinalitaeten

Uebung 1.1 *Zeige: Ist* $(A_i : i < \lambda)$ *eine Familie paarweise disjunkter, nichtleerer Mengen, so ist* $|\bigcup_{i<\lambda} A_i| = \lambda$.

Uebung 1.2 *Zeige: Ist* $(A_i : i < \lambda)$ *eine Familie von Mengen und fuer (zumindest) ein* $i < \lambda$ *ist* $|A_i| = \lambda$ *dann ist* $|\bigcup_{i<\lambda} A_i| = \lambda$.

Uebung 1.3 *Zeige: Ist* $(A_i : i < \lambda)$ *eine Familie paarweise disjunkter Mengen, wobei fuer alle* $i < \lambda$ *gilt* $|A_i| = \kappa$, *dann ist* $|\bigcup_{i<\lambda} A_i| = \kappa \otimes \lambda$.

Uebung 1.4 *Zeige:*

- *Ist* $A \subseteq \lambda$ *und* $|A| = \kappa$ *mit* $\mathrm{cf}(\kappa) < \lambda$, *dann ist* A *beschraenkte Teilmenge von* λ.
- *Folgere daraus: Ist* $A \subseteq \kappa^+$ *und* $|A| = \kappa$ *dann ist* A *beschraenkte Teilmenge von* κ^+.

Uebung 1.5 *Zeige: Ist* $\mathrm{cf}(\alpha) < \mathrm{cf}(\beta)$, *dann gibt es keine streng monoton steigende, kofinale Funktion von* α *nach* β.

Uebung 1.6 *Zeige: Es gibt keine streng monoton steigende, kofinale Funktion von* ω_ω *nach* $\omega_\omega + \omega$, *also gilt die Umkehrung von Uebung 1.5 und 1.7 nicht.*

Hinweis: Nimm an f sei eine solche Funktion. Betrachte das kleinste α so dass $f(\alpha) \geq \omega_\omega$ (warum existiert es?). Versuche aus der Existenz dieses α einen Widerspruch herzuleiten.

Uebung 1.7 *Zeige: Ist* $\mathrm{cf}(\alpha) > \mathrm{cf}(\beta)$, *dann gibt es keine streng monoton steigende, kofinale Funktion von* α *nach* β.

Hinweis: Nimm an f sei eine solche Funktion. Dann gibt es auch eine streng monoton steigende, kofinale Funktion g von $\mathrm{cf}(\alpha)$ nach β. Sei h eine streng monoton steigende, kofinale Funktion von $\mathrm{cf}(\beta)$ nach β. Definiere eine Funktion F von $\mathrm{cf}(\beta)$ nach $\mathrm{cf}(\alpha)$ folgendermassen:

$$F(i) = \min\{j : h(i) > g(j)\}.$$

Zeige dass F eine kofinale Funktion von $\mathrm{cf}(\beta)$ nach $\mathrm{cf}(\alpha)$ ist und ueberlege, warum das einen Widerspruch ergibt.