1 Absolutheit

Uebung 1.1
Beweise Lemma 6.2.2 und Korollar 6.2.3 aus dem Vorlesungsskriptum.

Uebung 1.2
Zeige: Ist $\gamma \geq \omega$ Limesordinalzahl, so ist $\mathcal{P}(x)$ absolut fuer R_γ, also

$$(y = \mathcal{P}(x))^{R_\gamma} \iff y = \mathcal{P}(x).$$

Hinweis:
Ist $x \in R_\gamma$ und $z \subseteq x$ so ist auch $z \in R_\gamma$, da $\operatorname{rank}(z) \leq \operatorname{rank}(x)$.

Uebung 1.3
Zeige: Ist $\gamma \geq \omega$ Limesordinalzahl, so gilt in R_γ das Potenzmengenaxiom.

Uebung 1.4 *Zeige: Ist $\gamma > \omega$, so gilt in R_γ das Unendlichkeitsaxiom. Ist $\gamma \geq \omega$ Limesordinalzahl, so gelten in R_γ alle Einzelaxiome von* ZFC, *also alle Axiome bis auf die Instanzen der beiden Axiomenschemata (Aussonderung und Ersetzung) - natuerlich gilt fuer $\gamma = \omega$ in R_ω das Unendlichkeitsaxiom nicht.*

Uebung 1.5 *Fuer welche γ gelten in R_γ saemtliche Instanzen des Aussonderungsschemas?*

Uebung 1.6 *Ueberlege etwas genauer als im Vorlesungsskriptum, warum Ordinalzahladdition (und ebenso Mulitplikation) absolut ist.*

2 Mengen hereditaer beschraenkter Groesse

Uebung 2.1 *Zeige: Ist κ Limeskardinalzahl, dann ist $H_\kappa = \bigcup_{\lambda<\kappa} H_\lambda$.*

Uebung 2.2 *Zeige: Ist κ regulaer unendlich, dann gilt:*

$$x \in H_\kappa \iff \forall y \in \operatorname{trcl}(\{x\})\ |y| < \kappa.$$

Beachte: $\operatorname{trcl}(\{x\}) = \operatorname{trcl}(x) \cup \{x\}$.
Beweise die Rueckwaertsrichtung durch Induktion nach $\operatorname{rank}(x)$.

Uebung 2.3 *Zeige: Ist κ singulaer, dann gilt obige Aussage nicht.*

Hinweis: Verwende zur Konstruktion eines ersten konkreten Gegenbeispieles $\kappa = \aleph_\omega$ und $x = \{\aleph_n : n \in \omega\}$, allgemeiner waehle dann κ beliebig singulaer und waehle x als unbeschraenkte Teilmenge von κ mit Maechtigkeit $\operatorname{cf}(\kappa)$.

Uebung 2.4 *Zeige: Fuer alle unendlichen Kardinalzahlen κ ist $|H_{\kappa^+}| = 2^\kappa$. Achtung - Hinweise auf der Rueckseite! Sonst zu schwer!*

Hinweis: Ueberlege zuerst, dass $|H_{\kappa^+}| \geq 2^\kappa$ (nicht schwer).

Fuer die andere Richtung der Ungleichung sei nun $P := \mathcal{P}(\kappa \times \kappa)$.

- Ueberlege, dass $|P| = 2^\kappa$.

- Konstruiere eine Surjektion $g \colon P \to H_{\kappa^+}$ folgendermassen:

  - Ist $E \in P$ eine wohlfundierte, extensionale Relation (auf κ), dann sei $f(E)$ transitiv so dass $(f(E), \in)$ isomorph zu (κ, E) ist. Andernfalls sei $f(E) = \emptyset$. Nach dem Satz ueber den Mostowski Kollaps (Satz 5.4.14 aus dem Vorlesungsskriptum) ist $f(E)$ eindeutig bestimmt, f also wohldefiniert. Ist nun $f(E)$ von der Form $f(E) = \mathrm{trcl}(\{y\})$ fuer ein $y \in H_{\kappa^+}$, dann sei $g(E) = y$, andernfalls sei $g(E) = \emptyset$.
  - g ist surjektiv: Sei $y \in H_{\kappa^+}$, dann ist $|\,\mathrm{trcl}(\{y\})| \leq \kappa$, also gibt es $E \in P$ so dass (κ, E) isomorph zu $(\mathrm{trcl}(\{y\}), \in)$ ist. Dann ist nach obiger Definition $g(E) = y$.

- Folglich gilt auch $|H_{\kappa^+}| \leq 2^\kappa$.