

## Übungen zur Einführung in die Mathematische Logik

### Übungsblatt 10

**Aufgabe 1:** (3 Punkte) Zeigen Sie:

Sei  $S$  eine Sprache die zumindest ein Konstantensymbol enthält. Sei  $\varphi$  eine quantorenfreie  $S$ -Formel mit freien Variablen  $x_0, \dots, x_{m-1}$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a)  $\vdash \exists x_0 \dots \exists x_{m-1} \varphi(x_0, \dots, x_{m-1})$ .  
(b) Es gibt  $N \in \mathbb{N}$  und variablenfreie Terme (Konstantenterme)  $t_0^0, \dots, t_{m-1}^0, \dots, t_0^{N-1}, \dots, t_{m-1}^{N-1}$  so dass

$$\vdash \varphi \frac{t_0^0, \dots, t_{m-1}^0}{x_0, \dots, x_{m-1}} \vee \dots \vee \varphi \frac{t_0^{N-1}, \dots, t_{m-1}^{N-1}}{x_0, \dots, x_{m-1}}.$$

Die folgende Aufgabe zeigt, dass Aufgabe 1 nicht für beliebige  $\varphi \in L^S$  gilt.

**Aufgabe 2:** (3 Punkte) Sei  $S = \{R, c\}$  mit einstelligem Relationssymbol  $R$  und Konstantensymbol  $c$ , sei  $\varphi = \forall x(Ry \vee \neg Rx)$ . Zeigen Sie:

- (a)  $\vdash \exists y \varphi$ .  
(b) Für  $j \geq 1$  und variablenfreie  $t_1, \dots, t_j \in T^S$  gilt nicht  $\vdash \varphi \frac{t_1}{y} \vee \dots \vee \varphi \frac{t_j}{y}$ .

**Aufgabe 3:** (3 Punkte) In der Vorlesung wurde im Rahmen der Logik-Programmierung  $2+2 = 4$  berechnet. Zeigen Sie auf ähnliche Weise  $2 \cdot 2 = 4$ .

**Aufgabe 4:** (3 Punkte) Wir bezeichnen  $\exists x x \equiv x$  als das *schwache Mengenexistenzaxiom*. Zeigen Sie:

- (a) Wenn wir in den Axiomen von  $ZF$  das Mengenexistenzaxiom durch das schwache Mengenexistenzaxiom ersetzen, so lässt sich in diesem System das Mengenexistenzaxiom (also die Existenz der leeren Menge) beweisen.  
(b) Jedes  $ZF$ -Axiom im Aussonderungsschema (Separation) lässt sich aus  $ZF$  ohne den Axiomen des Aussonderungsschemas beweisen.