Prof. Dr. Peter Koepke
Dr. Peter Holy

Abgabe am 27.04.2015

Übungen zur Einführung in die Mathematische Logik

Übungsblatt 2

Sei S eine Sprache.

Aufgabe 1: (3 Punkte) Zeigen Sie, dass ein echtes Anfangsstück eines Terms in T^S nie selbst ein Term ist. Dabei ist, wenn t ein Term der Form $t\colon n \to S_0 \cup S$ ist (also die Folge der n Symbole $t(0), \dots t(n-1)$), ein echtes Anfangsstück von t von der Form $t \upharpoonright i$ (also die Folge der ersten i Symbole von t) für ein $i < n$.

Hinweis: Der Beweis zu Aufgabe 1 muss induktiv über den Aufbau von Termen in T^S geführt werden. Das heißt zuerst muss man die Aussage für Variablen- und Konstantensymbole zeigen (was trivial ist, denn deren echte Anfangsstücke sind nur das leere Wort $\emptyset$). Sei nun $f \in S$ ein n-stelliges Funktionssymbol und sei t von der Form $ft_0 \dots t_{n-1}$ mit t_i in T^S für $i < n$. Als Induktionsvoraussetzung kann man nun annehmen dass die Aussage aus Aufgabe 1 für t_0, t_1, ..., t_{n-1} gilt, und man muss also zeigen dass sie dann auch für t gilt.

Aufgabe 2: (3 Punkte) Zeigen Sie (abermals induktiv über den Aufbau von Termen in T^S), dass sich jedes Endstück eines Terms eindeutig (!) als Folge von Termen schreiben lässt. Dabei ist, wenn t ein Term der Form $t\colon n \to S_0 \cup S$ ist, ein Endstück von t ein $s\colon i \to S_0 \cup S$ mit $i \leq n$ und $s(k) = t(k+n-i)$ für alle $k < i$ (s ist also die Folge der letzten i Symbole von t).

Aufgabe 3 *(Eindeutige Lesbarkeit von Termen)*: (3 Punkte) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 2, dass für jeden Term t in T^S genau eine der folgenden Aussagen zutrifft:

(a) $t = v_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
(b) $t = c$ für ein Konstantensymbol $c \in S$.
(c) Es gibt ein n-stelliges Funktionssymbol $f \in S$ und eine eindeutig (!) bestimmte Folge von Termen $t_0, \dots, t_{n-1} \in T^S$ so dass $t = ft_0 \dots t_{n-1}$.

Aufgabe 4 *(Eindeutige Lesbarkeit von Formeln)*: (3 Punkte) Vervollständigen (durch Ergänzen der fehlenden Fälle) und beweisen Sie folgende Aussage.

Jede Formel φ in L^S ist von genau einer der folgenden Formen:

(a) $\perp$.
(b) $t_0 \equiv t_1$ für t_0, t_1 in T^S.
...