Prof. Dr. Peter Koepke
Dr. Peter Holy

Abgabe am 11.05.2015

Übungen zur Einführung in die Mathematische Logik

Übungsblatt 4

Definition 1. *(vom letzten Blatt) Sei S eine Sprache und $\mathfrak{A}$ eine S-Substruktur von $\mathfrak{B}$. Ist $\mathfrak{M}$ eine Erweiterung von $\mathfrak{A}$ durch Belegung von Variablen, so ist $\mathfrak{M}^{\mathfrak{B}}$ die Funktion mit Definitionsmenge $\{\forall\} \cup S \cup Var$, welche $\mathfrak{M}^{\mathfrak{B}} \restriction (\{\forall\} \cup S) = \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{M}^{\mathfrak{B}} \restriction Var = \mathfrak{M} \restriction Var$ erfüllt.*

Wir sagen dass φ aus L^S *absolut* zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist, falls $\mathfrak{M}(\varphi) = \mathfrak{M}^{\mathfrak{B}}(\varphi)$ für jede Erweiterung $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{A}$ durch Belegung von Variablen.

Aufgabe 1: (3 Punkte) Beweisen Sie folgende Aussagen.

(a) Die Menge der zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ absoluten Formeln ist abgeschlossen unter Negation, Konjunktion und Disjunktion.

(b) Jede quantorenfreie Formel ist absolut zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ (quantorenfreie Formeln sind solche Formeln, in denen keine Quantoren ($\forall/\exists$) auftreten).

(c) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

  (a) $\mathfrak{A}$ ist *elementare Unterstruktur* von $\mathfrak{B}$, d.h. jedes φ aus L^S ist absolut zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

  (b) Ist φ aus L^S und $\mathfrak{M}$ eine Erweiterung von $\mathfrak{A}$ durch Belegung von Variablen, so impliziert $\mathfrak{M}^{\mathfrak{B}}(\exists x\varphi) = 1$ bereits $\mathfrak{M}(\exists x\varphi) = 1$.

Aufgabe 2: (4 Punkte) Sei S eine Sprache, $\Phi \subseteq L^S$ und $\varphi, \psi \in L^S$.

(a) Zeigen Sie: $\Phi \models (\varphi \wedge \psi)$ genau dann, wenn $\Phi \models \varphi$ und $\Phi \models \psi$.

(b) Zeigen Sie: Wenn $\Phi \models \varphi$ oder $\Phi \models \psi$, dann $\Phi \models (\varphi \vee \psi)$.

(c) Geben Sie S, Φ, φ, ψ an, so dass $\Phi \models (\varphi \vee \psi)$, aber weder $\Phi \models \varphi$, noch $\Phi \models \psi$.

(d) Zeigen Sie: Wenn $\Phi \models (\varphi \vee \psi)$ und $\Phi \models \neg\varphi$, dann gilt $\Phi \models \psi$.

(e) Gilt für alle S, Φ, φ, ψ dass $\Phi \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$ genau dann wenn $\Phi \models \varphi$ zu $\Phi \models \psi$ äquivalent ist?

Aufgabe 3: (4 Punkte) Sei S eine Sprache, $\varphi \in L^S$ und seien x und y Variablen, so dass y nicht frei in φ vorkommt. Wir schreiben $\exists^{=1}x\varphi$ für $\exists x(\varphi \wedge \forall y\,(\varphi\frac{y}{x} \to x \equiv y))$.
Zeigen Sie, dass in jedem S-Modell $\mathfrak{M}$ gilt:

$$\mathfrak{M} \models \exists^{=1}x\varphi \text{ gdw es genau ein } a \in M \text{ gibt mit } \mathfrak{M}\frac{a}{x} \models \varphi.$$

Aufgabe 4: (2 Punkte) Sei S eine Sprache, $t, t_0, \ldots, t_n \in T^S$ und $y, x_0, \ldots, x_n$ Variablen. Zeigen Sie: Wenn $y \in var(t\frac{t_0 \ldots t_n}{x_0 \ldots x_n})$, so ist $y \in var(t_0) \cup \ldots \cup var(t_n)$ oder ($y \in var(t)$ und $y \neq x_i$ für $0 \leq i \leq n$).