Prof. Dr. Peter Koepke
Dr. Peter Holy

Abgabe am 01.06.2015

Übungen zur Einführung in die Mathematische Logik

Übungsblatt 6

Aufgabe 1: Sei S eine Sprache und sei $\mathfrak{M}$ ein S-Modell. Sei $Th(\mathfrak{M})$ die *Theorie des Modells* $\mathfrak{M}$, das heisst die Menge aller S-Formeln φ so dass $\mathfrak{M} \models \varphi$. Zeigen Sie

(a) (1 Punkt) $Th(\mathfrak{M})$ ist konsistent und (Ableitungs-)vollständig.

(b) (2 Punkte) Geben Sie ein Beispiel für eine Sprache S und ein S-Modell $\mathfrak{M}$ an, so dass $Th(\mathfrak{M})$ *nicht immer Gegenbeispiele enthält*, d.h. so dass es $\varphi \in L^S$ gibt, so dass für alle Terme $t \in T^S$ gilt:

$$Th(\mathfrak{M}) \nvdash \neg\forall x\varphi \rightarrow \neg\varphi\frac{t}{x}.$$

Aufgabe 2: (3 Punkte) Sei $S = \{\leq\}$, wobei $\leq$ ein 2-stelliges Relationssymbol bezeichne. Statt $\leq(x, y)$ schreiben wir, wie üblich, $x \leq y$. Sei Γ die Menge der folgenden S-Formeln:

(a) $\forall x\; x \leq x$.

(b) $\forall x \forall y \forall z\; [(x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z]$.

(c) $\forall x \forall y \exists z\; [x \leq z \wedge y \leq z]$.

Zeigen Sie (ohne Verwendung des Vollständigkeitssatzes), dass

$$\Gamma \vdash \forall x \forall y \forall z \exists w\; [x \leq w \wedge y \leq w \wedge z \leq w].$$

Aufgabe 3: Sei S eine Sprache und Φ eine Menge von S-Formeln.

(a) (2 Punkte) Sei S^+ die Sprache, die S um ein n-stelliges Funktionssymbol f_φ für jede S-Formel φ mit $n+1$ freien Variablen erweitert, und sei

$$\Phi^+ = \Phi \cup \{\psi_\varphi \mid \varphi \text{ ist eine } S\text{-Formel mit freien Variablen}\},$$

wobei ψ_φ folgende S^+-Formel bezeichne:

$$\forall x_0 \dots \forall x_{n-1} [\exists y\, \varphi(x_0, \dots, x_{n-1}, y) \rightarrow \varphi(x_0, \dots, x_{n-1}, f_\varphi(x_0, \dots, x_{n-1}))].$$

Beweisen Sie, dass für jedes S-Modell $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{M} \models \Phi$ ein S^+-Modell $\mathfrak{M}^+$ mit $\mathfrak{M}^+ \models \Phi^+$ und $\mathfrak{M}^+ \upharpoonright (\{\forall\} \cup S \cup Var) = \mathfrak{M}$ existiert.

(b) (2 Punkte) Konstruieren Sie eine Sprache S^ω, die S erweitert, und eine Menge Φ^ω von S^ω-Formeln mit $\Phi \subseteq \Phi^\omega$, so dass die folgenden Aussagen gelten:

(i) Für jede S^ω-Formel φ mit $n+1$ freien Variablen existiert ein (jeweils unterschiedliches) S^ω-Funktionssymbol f mit

$$\Phi^\omega \models \forall x_0 \dots \forall x_{n-1} [\exists y\, \varphi(x_0, \dots, x_{n-1}, y) \rightarrow \varphi(x_0, \dots, x_{n-1}, f(x_0, \dots, x_{n-1}))].$$

(ii) Für jedes S-Modell $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{M} \models \Phi$ existiert ein S^ω-Modell $\mathfrak{M}^\omega$ mit $\mathfrak{M}^\omega \models \Phi^\omega$ und $\mathfrak{M}^\omega \upharpoonright (\{\forall\} \cup S \cup Var) = \mathfrak{M}$.

Bemerkung: Wir sagen in diesem Fall, dass Φ^ω Skolemfunktionen besitzt.

Aufgabe 4:

(a) (2 Punkte) Sei S eine Sprache und sei Φ eine konsistente Menge von S-Formeln mit der Eigenschaft, dass jede Formel $\varphi \in \Phi$ von der Form

$$\forall x_1 \dots \forall x_{n-1}\; s \equiv t$$

für ein $n \in \mathbb{N}$ und S-Terme s und t mit freien Variablen jeweils einer Teilmenge von $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ ist, und sei $\mathfrak{T}^\Phi$ das dazugehörige Termmodell.

Zeigen Sie: $\mathfrak{T}^\Phi \models \Phi$.

(b) (2 Punkte) Sei $S = \{+, \cdot, -, 0, 1\}$ die erweiterte Sprache der Ringtheorie und $\Phi \subseteq L^S$ sei die Menge der Axiome der Ringtheorie in dieser Sprache, jedoch ohne dem Axiom "$\neg(0 = 1)$" - diese kann man dann als Formeln in der in a) spezifizierten Form angeben. Damit ist das dazugehörige Termmodell $\mathfrak{T}^\Phi$ nach a) also ein Modell der Axiome der Ringtheorie, ausser möglicherweise des Axioms $\neg(0 = 1)$. Zeigen Sie:

- $\mathfrak{T}^\Phi \models \neg(0 = 1)$.
- $\mathfrak{T}^\Phi$ hat einen zu $\mathbb{Z}$ isomorphen Unterkörper, aber $\mathfrak{T}^\Phi$ ist nicht zu $\mathbb{Z}$ isomorph.