Prof. Dr. Peter Koepke
Dr. Peter Holy

Abgabe am 08.06.2015

Übungen zur Einführung in die Mathematische Logik

Übungsblatt 7

Aufgabe 1: (3 Punkte)

(a) Es sei S_K die Sprache der Körpertheorie und φ eine S_K-Formel, die in jedem unendlichen Körper gilt. Beweisen Sie, dass es eine natürliche Zahl n gibt, so dass φ in jedem endlichen Körper mit mindestens n Elementen gilt. Folgern Sie, dass die Klasse der unendlichen Körper nicht endlich axiomatisierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass die torsionsfreien Gruppen (siehe Übungsblatt 1) nicht endlich axiomatisierbar sind.

(c) Zeigen Sie, dass die Klasse aller (ungerichteten) Graphen ohne Zyklen nicht endlich axiomatisierbar ist.

Aufgabe 2: (3 Punkte) Sei S eine Sprache, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ Klassen von S-Strukturen und sei Φ eine endliche Menge von S-Sätzen mit

$$\mathcal{K} \subseteq Mod^S\Phi \text{ und } \mathcal{L} = (Mod^S\Phi) \setminus \mathcal{K}.$$

Zeigen Sie:

(a) Sind $\mathcal{K}$ und $\mathcal{L}$ axiomatisierbar, so sind diese endlich axiomatisierbar.

(b) Die Klasse der endlichen Körper ist nicht axiomatisierbar.

(c) Die Klasse der Torsionsgruppen (siehe Übungsblatt 1) ist nicht axiomatisierbar.

(d) Die Klasse aller (ungerichteten) Graphen mit Zyklen ist nicht axiomatisierbar.

Aufgabe 3: (3 Punkte) Es sei S eine Sprache, $\mathcal{K}$ eine Klasse von S-Strukturen und Φ eine Menge von S-Sätzen, die $\mathcal{K}$ axiomatisiert. Ist Ψ eine endliche Menge von S-Sätzen, die $\mathcal{K}$ axiomatisiert, so existiert eine endliche Teilmenge von Φ, die $\mathcal{K}$ axiomatisiert.

Aufgabe 4: (3 Punkte) Sei $S_{Ar_<} = \{+, \cdot, 0, 1, <\}$ und sei $PA_< \subseteq L^{S_{Ar_<}}$ die Erweiterung von PA durch folgende Axiome:

- $0 < 1$.
- $\forall x \forall y \; x < y \to x + 1 < y + 1$.
- $\forall x \forall y \; x < y \to x < y + 1$.
- $\forall x \forall y \; \neg(x < y \wedge y < x)$.
- $\forall x \forall y \forall z \; (x < y \wedge y < z) \to (x < z)$.
- $\forall x \forall y \; (x < y \vee y < x)$.

Zeigen Sie, dass es ein Modell von $PA_<$ mit einer unendlichen absteigenden Kette

$$\ldots < a_n < \ldots < a_1 < a_0 \; (n \in \mathbb{N})$$

von Elementen gibt, und dass dies im Standardmodell $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, <)$ von $PA_<$ nicht der Fall ist.