Prof. Dr. Peter Koepke
Dr. Peter Holy

Abgabe am 15.06.2015

Übungen zur Einführung in die Mathematische Logik

Übungsblatt 8

Aufgabe 1: (3 Punkte) Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $PA \vdash [x \equiv 0 \vee \exists y\, x \equiv y + 1]$.
(b) $PA \vdash \forall x\, \forall y\; x + y \equiv y + x$.
(c) $PA \vdash \forall x\, \forall y\, [y \equiv 0 \vee \exists r\, \exists s\, \exists t\, (x \equiv t \cdot y + r \wedge r + s + 1 \equiv y)]$.

Aufgabe 2: (3 Punkte) Es sei M ein Modell von PA.

(a) Konstruieren Sie eine strukturerhaltende Einbettung $i \colon \mathbb{N} \to |M|$ des Standardmodells $(\mathbb{N}, +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}, 0^{\mathbb{N}}, 1^{\mathbb{N}})$ der Arithmetik in M (es soll also etwa $i(0^{\mathbb{N}}) = 0^M$, $i(x+y) = i(x)+i(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$ etc. gelten).
(b) Zeigen Sie, dass die Einbettung i eindeutig bestimmt und ihr Bild abwärts abgeschlossen ist, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x, y \in |M|$ mit $i(n) = x +^M y$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $i(m) = x$.

Aufgabe 3: (3 Punkte) Beweisen Sie, dass die Klasse der Nichtstandardmodelle von PA (diese besteht aus allen Modellen von PA, die nicht zum Standardmodell von PA isomorph sind) nicht in der Sprache der Arithmetik $S_{Ar} = \{+, \cdot, 0, 1\}$ axiomatisiert werden kann.

Aufgabe 4: (3 Punkte) Sei S eine Sprache. Zeigen Sie, dass für keine unendliche S-Struktur M die Klasse der zu M isomorphen S-Strukturen durch eine höchstens abzählbare Formelmenge axiomatisierbar ist.