Mathematische Unentscheidbarkeit

Peter Holy

Universität Bonn

Mathematisches Institut

Dies Academicus, 04.12.2019

Unentscheidbarkeit

Gödel's Unvollständigkeitssatz (1931)

In jedem mathematischen System gibt es Aussagen, die weder als wahr noch als falsch entschieden werden können.

Unentscheidbarkeit

Gödel's Unvollständigkeitssatz (1931)

In jedem mathematischen System gibt es Aussagen, die weder als wahr noch als falsch entschieden werden können.

Ich möchte heute eine solche unentscheidbare Aussage der Mathematik vorstellen: die *Cantorsche Kontinuumshypothese*.

Was ist eigentlich Mathematik?

- Axiome + Folgerungsregeln

Was ist eigentlich Mathematik?

- Axiome + Folgerungsregeln
- Weitgehend als Grundlage der Mathematik akzeptiert:

  Zermelo-Fraenkel Axiome der Mengenlehre

Widerspruchsfreiheit

Lässt sich aus unseren Axiomen und Folgerungsregeln etwas offensichtlich Unsinniges - ein *Widerspruch* - etwa die Aussage $0 = 1$ herleiten?

Widerspruchsfreiheit

Lässt sich aus unseren Axiomen und Folgerungsregeln etwas offensichtlich Unsinniges - ein *Widerspruch* - etwa die Aussage $0 = 1$ herleiten? Gödel hat in seinem (zweiten) Unvollständigkeitssatz gezeigt, dass diese Frage sich nicht verneinen lässt:

Widerspruchsfreiheit

Lässt sich aus unseren Axiomen und Folgerungsregeln etwas offensichtlich Unsinniges - ein *Widerspruch* - etwa die Aussage $0 = 1$ herleiten? Gödel hat in seinem (zweiten) Unvollständigkeitssatz gezeigt, dass diese Frage sich nicht verneinen lässt:

Gödels zweiter Unvollständigkeitssatz

Kein mathematisches System kann seine Widerspruchsfreiheit beweisen.

Widerspruchsfreiheit

Lässt sich aus unseren Axiomen und Folgerungsregeln etwas offensichtlich Unsinniges - ein *Widerspruch* - etwa die Aussage $0 = 1$ herleiten? Gödel hat in seinem (zweiten) Unvollständigkeitssatz gezeigt, dass diese Frage sich nicht verneinen lässt:

Gödels zweiter Unvollständigkeitssatz

Kein mathematisches System kann seine Widerspruchsfreiheit beweisen.

Wir gehen aber davon aus, dass die Mathematik widerspruchsfrei ist.

Die natürlichen Zahlen und die Mengenlehre

Grundlage (fast) aller Mathematik sind die natürlichen Zahlen: Sie beginnen mit der 0, und zu jeder natürlichen Zahl gibt es eine nächste,

Die natürlichen Zahlen und die Mengenlehre

Grundlage (fast) aller Mathematik sind die natürlichen Zahlen: Sie beginnen mit der 0, und zu jeder natürlichen Zahl gibt es eine nächste, also nach der 0 die 1, dann die 2, die 3, ...

Die natürlichen Zahlen und die Mengenlehre

Grundlage (fast) aller Mathematik sind die natürlichen Zahlen: Sie beginnen mit der 0, und zu jeder natürlichen Zahl gibt es eine nächste, also nach der 0 die 1, dann die 2, die 3, ... Diese können wir alle (mit Hilfe unserer Axiome) innerhalb der Mengenlehre finden.

Die natürlichen Zahlen und die Mengenlehre

Grundlage (fast) aller Mathematik sind die natürlichen Zahlen: Sie beginnen mit der 0, und zu jeder natürlichen Zahl gibt es eine nächste, also nach der 0 die 1, dann die 2, die 3, ... Diese können wir alle (mit Hilfe unserer Axiome) innerhalb der Mengenlehre finden. Ein Axiom der Mengenlehre besagt dann das folgende:

Die natürlichen Zahlen und die Mengenlehre

Grundlage (fast) aller Mathematik sind die natürlichen Zahlen: Sie beginnen mit der 0, und zu jeder natürlichen Zahl gibt es eine nächste, also nach der 0 die 1, dann die 2, die 3, ... Diese können wir alle (mit Hilfe unserer Axiome) innerhalb der Mengenlehre finden. Ein Axiom der Mengenlehre besagt dann das folgende:

Unendlichkeitsaxiom

Die Sammlung aller natürlicher Zahlen existiert als ein einzelnes (unendliches) mathematischen Objekt $\mathbb{N}$.

Die natürlichen Zahlen und die Mengenlehre

Grundlage (fast) aller Mathematik sind die natürlichen Zahlen: Sie beginnen mit der 0, und zu jeder natürlichen Zahl gibt es eine nächste, also nach der 0 die 1, dann die 2, die 3, ... Diese können wir alle (mit Hilfe unserer Axiome) innerhalb der Mengenlehre finden. Ein Axiom der Mengenlehre besagt dann das folgende:

Unendlichkeitsaxiom

Die Sammlung aller natürlicher Zahlen existiert als ein einzelnes (unendliches) mathematischen Objekt $\mathbb{N}$.

- Die Existenz von $\mathbb{N}$ lässt sich nicht aus den übrigen Axiomen beweisen.

Die natürlichen Zahlen und die Mengenlehre

Grundlage (fast) aller Mathematik sind die natürlichen Zahlen: Sie beginnen mit der 0, und zu jeder natürlichen Zahl gibt es eine nächste, also nach der 0 die 1, dann die 2, die 3, ... Diese können wir alle (mit Hilfe unserer Axiome) innerhalb der Mengenlehre finden. Ein Axiom der Mengenlehre besagt dann das folgende:

Unendlichkeitsaxiom

Die Sammlung aller natürlicher Zahlen existiert als ein einzelnes (unendliches) mathematischen Objekt $\mathbb{N}$.

- Die Existenz von $\mathbb{N}$ lässt sich nicht aus den übrigen Axiomen beweisen.
- Sie gilt aber für die meisten Mathematiker als eine vernünftige und essentiell wichtige Annahme, ohne welche die meiste moderne Mathematik unmöglich wäre.

Die ganzen Zahlen

- Existiert $\mathbb{N}$, so existiert auch $\mathbb{Z}$, die Menge aller *ganzen Zahlen*.

Die ganzen Zahlen

- Existiert $\mathbb{N}$, so existiert auch $\mathbb{Z}$, die Menge aller *ganzen Zahlen*.
- In dieser gibt es die 0 und zu jeder positiven natürlichen Zahl a auch deren negativen Gegenspieler $-a$.

Die ganzen Zahlen

- Existiert $\mathbb{N}$, so existiert auch $\mathbb{Z}$, die Menge aller *ganzen Zahlen*.
- In dieser gibt es die 0 und zu jeder positiven natürlichen Zahl a auch deren negativen Gegenspieler $-a$.
- Scheinbar gibt es ungefähr doppelt so viele ganze Zahlen wie es natürliche Zahlen gibt.

Die ganzen Zahlen

- Existiert $\mathbb{N}$, so existiert auch $\mathbb{Z}$, die Menge aller *ganzen Zahlen*.
- In dieser gibt es die 0 und zu jeder positiven natürlichen Zahl a auch deren negativen Gegenspieler $-a$.
- Scheinbar gibt es ungefähr doppelt so viele ganze Zahlen wie es natürliche Zahlen gibt.
- Wir können die ganzen Zahlen aber wie die natürlichen Zahlen aufzählen:

Die ganzen Zahlen

- Existiert $\mathbb{N}$, so existiert auch $\mathbb{Z}$, die Menge aller *ganzen Zahlen*.
- In dieser gibt es die 0 und zu jeder positiven natürlichen Zahl a auch deren negativen Gegenspieler $-a$.
- Scheinbar gibt es ungefähr doppelt so viele ganze Zahlen wie es natürliche Zahlen gibt.
- Wir können die ganzen Zahlen aber wie die natürlichen Zahlen aufzählen: $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$

Die ganzen Zahlen

- Existiert $\mathbb{N}$, so existiert auch $\mathbb{Z}$, die Menge aller *ganzen Zahlen*.
- In dieser gibt es die 0 und zu jeder positiven natürlichen Zahl a auch deren negativen Gegenspieler $-a$.
- Scheinbar gibt es ungefähr doppelt so viele ganze Zahlen wie es natürliche Zahlen gibt.
- Wir können die ganzen Zahlen aber wie die natürlichen Zahlen aufzählen: $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$
- Ist es möglich eine Menge - wie hier die ganzen Zahlen - mit Hilfe der natürlichen Zahlen durchzunummerieren, so nennen wir sie *abzählbar*, und betrachten sie als *gleichgroß* wie $\mathbb{N}$.

Die rationalen Zahlen

- Die positiven rationalen Zahlen sind die Brüche zwischen positiven natürlichen Zahlen.

Die rationalen Zahlen

- Die positiven rationalen Zahlen sind die Brüche zwischen positiven natürlichen Zahlen.
- Wir können Paare von natürlichen Zahlen $\langle a, b \rangle$ mit Brüchen $\frac{a}{b}$ identifizieren.

Die rationalen Zahlen

- Die positiven rationalen Zahlen sind die Brüche zwischen positiven natürlichen Zahlen.
- Wir können Paare von natürlichen Zahlen $\langle a, b\rangle$ mit Brüchen $\frac{a}{b}$ identifizieren.
- Dabei sind manche Brüche zu unterschiedlichen Paaren gleichwertig, es ist etwa $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \ldots$

Die rationalen Zahlen

- Die positiven rationalen Zahlen sind die Brüche zwischen positiven natürlichen Zahlen.
- Wir können Paare von natürlichen Zahlen $\langle a, b\rangle$ mit Brüchen $\frac{a}{b}$ identifizieren.
- Dabei sind manche Brüche zu unterschiedlichen Paaren gleichwertig, es ist etwa $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \ldots$
- Georg Cantor hat in seinem ersten Diagonalverfahren (1874) gezeigt, dass sich die Brüche wie die natürlichen Zahlen *aufzählen* lassen - also, dass die rationalen Zahlen ebenfalls abzählbar sind.

Die reellen Zahlen

Brüche lassen sich auch als periodische Dezimalzahlen darstellen:

Die reellen Zahlen

Brüche lassen sich auch als periodische Dezimalzahlen darstellen:

- $\frac{1}{3} = 0.3333\ldots = 0.\dot{3}$.
- $\frac{4}{7} = 0.571428571428\ldots = 0.\overline{571428}$.
- $\frac{3}{2} = 1.5 = 1.5000\ldots = 1.5\dot{0}$.

Die reellen Zahlen

Brüche lassen sich auch als periodische Dezimalzahlen darstellen:

- $\frac{1}{3} = 0.3333\ldots = 0.\dot{3}$.
- $\frac{4}{7} = 0.571428571428\ldots = 0.\overline{571428}$.
- $\frac{3}{2} = 1.5 = 1.5000\ldots = 1.5\dot{0}$.

Lassen wir nun auch unendliche, nichtperiodische Dezimalzahlen zu, so erhalten wir die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

Die reellen Zahlen

Brüche lassen sich auch als periodische Dezimalzahlen darstellen:

- $\frac{1}{3} = 0.3333\ldots = 0.\dot{3}$.
- $\frac{4}{7} = 0.571428571428\ldots = 0.\overline{571428}$.
- $\frac{3}{2} = 1.5 = 1.5000\ldots = 1.5\dot{0}$.

Lassen wir nun auch unendliche, nichtperiodische Dezimalzahlen zu, so erhalten wir die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

- Deren Existenz folgt ebenfalls aus den Axiomen der Mengenlehre, insbesondere aus dem sogenannten *Potenzmengenaxiom*, welches besagt, dass zu jeder Menge auch die Menge all ihrer Teilmengen existiert.

Die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen

In seinem zweiten Diagonalverfahren hat Cantor gezeigt, dass man die reellen Zahlen *nicht* abzählen kann – sie sind *überabzählbar*:

Die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen

In seinem zweiten Diagonalverfahren hat Cantor gezeigt, dass man die reellen Zahlen *nicht* abzählen kann – sie sind *überabzählbar*: Für das Argument beschränken wir uns der Einfachkeit halber nur auf Dezimalzahlen zwischen 0 und 1, deren Ziffern nur 0 und 1 sind.

Die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen

In seinem zweiten Diagonalverfahren hat Cantor gezeigt, dass man die reellen Zahlen *nicht* abzählen kann – sie sind *überabzählbar*: Für das Argument beschränken wir uns der Einfachkeit halber nur auf Dezimalzahlen zwischen 0 und 1, deren Ziffern nur 0 und 1 sind. Angenommen, man könnte all diese abzählen.

Die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen

In seinem zweiten Diagonalverfahren hat Cantor gezeigt, dass man die reellen Zahlen *nicht* abzählen kann – sie sind *überabzählbar*: Für das Argument beschränken wir uns der Einfachheit halber nur auf Dezimalzahlen zwischen 0 und 1, deren Ziffern nur 0 und 1 sind. Angenommen, man könnte all diese abzählen.

1. $0.\mathbf{0}10010111001\ldots$
2. $0.1\mathbf{0}0110001011\ldots$
3. $0.00\mathbf{1}101100111\ldots$
4. $0.111\mathbf{0}01110100\ldots$
5. $\ldots$

Die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen

In seinem zweiten Diagonalverfahren hat Cantor gezeigt, dass man die reellen Zahlen *nicht* abzählen kann – sie sind *überabzählbar*: Für das Argument beschränken wir uns der Einfachheit halber nur auf Dezimalzahlen zwischen 0 und 1, deren Ziffern nur 0 und 1 sind. Angenommen, man könnte all diese abzählen.

1. $0.\mathbf{0}10010111001\ldots$
2. $0.1\mathbf{0}0110001011\ldots$
3. $0.00\mathbf{1}101100111\ldots$
4. $0.111\mathbf{0}01110100\ldots$
5. $\ldots$

Jetzt invertieren wir die reelle Zahl, die wir entlang der Diagonale finden.

$0.$

Die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen

In seinem zweiten Diagonalverfahren hat Cantor gezeigt, dass man die reellen Zahlen *nicht* abzählen kann – sie sind *überabzählbar*: Für das Argument beschränken wir uns der Einfachheit halber nur auf Dezimalzahlen zwischen 0 und 1, deren Ziffern nur 0 und 1 sind. Angenommen, man könnte all diese abzählen.

1. $0.\mathbf{0}10010111001\ldots$
2. $0.1\mathbf{0}0110001011\ldots$
3. $0.00\mathbf{1}101100111\ldots$
4. $0.111\mathbf{0}01110100\ldots$
5. $\ldots$

Jetzt invertieren wir die reelle Zahl, die wir entlang der Diagonale finden.

0.1

Die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen

In seinem zweiten Diagonalverfahren hat Cantor gezeigt, dass man die reellen Zahlen *nicht* abzählen kann – sie sind *überabzählbar*: Für das Argument beschränken wir uns der Einfachheit halber nur auf Dezimalzahlen zwischen 0 und 1, deren Ziffern nur 0 und 1 sind. Angenommen, man könnte all diese abzählen.

1. $0.\mathbf{0}10010111001\ldots$
2. $0.1\mathbf{0}0110001011\ldots$
3. $0.00\mathbf{1}101100111\ldots$
4. $0.111\mathbf{0}01110100\ldots$
5. $\ldots$

Jetzt invertieren wir die reelle Zahl, die wir entlang der Diagonale finden.

0.11

Die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen

In seinem zweiten Diagonalverfahren hat Cantor gezeigt, dass man die reellen Zahlen *nicht* abzählen kann – sie sind *überabzählbar*: Für das Argument beschränken wir uns der Einfachheit halber nur auf Dezimalzahlen zwischen 0 und 1, deren Ziffern nur 0 und 1 sind. Angenommen, man könnte all diese abzählen.

1. $0.\mathbf{0}10010111001\ldots$
2. $0.1\mathbf{0}0110001011\ldots$
3. $0.00\mathbf{1}101100111\ldots$
4. $0.111\mathbf{0}01110100\ldots$
5. $\ldots$

Jetzt invertieren wir die reelle Zahl, die wir entlang der Diagonale finden.

$$0.110$$

Die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen

In seinem zweiten Diagonalverfahren hat Cantor gezeigt, dass man die reellen Zahlen *nicht* abzählen kann – sie sind *überabzählbar*: Für das Argument beschränken wir uns der Einfachheit halber nur auf Dezimalzahlen zwischen 0 und 1, deren Ziffern nur 0 und 1 sind. Angenommen, man könnte all diese abzählen.

1. $0.\mathbf{0}10010111001\ldots$
2. $0.1\mathbf{0}0110001011\ldots$
3. $0.00\mathbf{1}101100111\ldots$
4. $0.111\mathbf{0}01110100\ldots$
5. $\ldots$

Jetzt invertieren wir die reelle Zahl, die wir entlang der Diagonale finden.

$0.1101\ldots$

Die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen

In seinem zweiten Diagonalverfahren hat Cantor gezeigt, dass man die reellen Zahlen *nicht* abzählen kann – sie sind *überabzählbar*: Für das Argument beschränken wir uns der Einfachheit halber nur auf Dezimalzahlen zwischen 0 und 1, deren Ziffern nur 0 und 1 sind. Angenommen, man könnte all diese abzählen.

1. $0.\mathbf{0}10010111001\ldots$
2. $0.1\mathbf{0}0110001011\ldots$
3. $0.00\mathbf{1}101100111\ldots$
4. $0.111\mathbf{0}01110100\ldots$
5. $\ldots$

Jetzt invertieren wir die reelle Zahl, die wir entlang der Diagonale finden.

$$0.1101\ldots$$

Diese reelle Zahl liegt auch zwischen 0 und 1 und besteht nur aus Ziffern 0 und 1, sie ist aber von allen Zahlen in der Aufzählung verschieden!

Die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen

In seinem zweiten Diagonalverfahren hat Cantor gezeigt, dass man die reellen Zahlen *nicht* abzählen kann – sie sind *überabzählbar*: Für das Argument beschränken wir uns der Einfachheit halber nur auf Dezimalzahlen zwischen 0 und 1, deren Ziffern nur 0 und 1 sind. Angenommen, man könnte all diese abzählen.

1. $0.\mathbf{0}10010111001\ldots$
2. $0.1\mathbf{0}0110001011\ldots$
3. $0.00\mathbf{1}101100111\ldots$
4. $0.111\mathbf{0}01110100\ldots$
5. $\ldots$

Jetzt invertieren wir die reelle Zahl, die wir entlang der Diagonale finden.

$$0.1101\ldots$$

Diese reelle Zahl liegt auch zwischen 0 und 1 und besteht nur aus Ziffern 0 und 1, sie ist aber von allen Zahlen in der Aufzählung verschieden! Also gibt es eine solche Aufzählung nicht.

Die Cantorsche Kontinuumshypothese

- Cantor hat nun die Vermutung aufgestellt, dass jede *Teilmenge* der reellen Zahlen, also jede Sammlung von reellen Zahlen, entweder abzählbar oder so groß wie die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen selbst ist.

Die Cantorsche Kontinuumshypothese

- Cantor hat nun die Vermutung aufgestellt, dass jede *Teilmenge* der reellen Zahlen, also jede Sammlung von reellen Zahlen, entweder abzählbar oder so groß wie die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen selbst ist.
- Dabei ist eine Menge *so groß wie* $\mathbb{R}$, wenn wir mit ihrer Hilfe $\mathbb{R}$ aufzählen können –

Die Cantorsche Kontinuumshypothese

- Cantor hat nun die Vermutung aufgestellt, dass jede *Teilmenge* der reellen Zahlen, also jede Sammlung von reellen Zahlen, entweder abzählbar oder so groß wie die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen selbst ist.
- Dabei ist eine Menge *so groß wie* $\mathbb{R}$, wenn wir mit ihrer Hilfe $\mathbb{R}$ aufzählen können – das heißt, dass wir eine Identifikation zwischen dieser Menge und den reellen Zahlen finden, so dass am Ende keine reelle Zahl übrig bleibt.

Die Cantorsche Kontinuumshypothese

- Cantor hat nun die Vermutung aufgestellt, dass jede *Teilmenge* der reellen Zahlen, also jede Sammlung von reellen Zahlen, entweder abzählbar oder so groß wie die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen selbst ist.
- Dabei ist eine Menge *so groß wie* $\mathbb{R}$, wenn wir mit ihrer Hilfe $\mathbb{R}$ aufzählen können – das heißt, dass wir eine Identifikation zwischen dieser Menge und den reellen Zahlen finden, so dass am Ende keine reelle Zahl übrig bleibt.
- Eine solche Identifikation zwischen Mengen nennt man in der Mathematik eine *Bijektion*.

Beispiel: Intervalle reeller Zahlen sind so groß wie $\mathbb{R}$

- Betrachten wir etwa das Intervall $(0, 1)$, also die reellen Zahlen x mit $0 < x < 1$.

Beispiel: Intervalle reeller Zahlen sind so groß wie $\mathbb{R}$

- Betrachten wir etwa das Intervall $(0, 1)$, also die reellen Zahlen x mit $0 < x < 1$.
- Betrachten wir die Abbildung f mit $f(x) = \frac{1}{x} - 1$.

Beispiel: Intervalle reeller Zahlen sind so groß wie $\mathbb{R}$

- Betrachten wir etwa das Intervall $(0, 1)$, also die reellen Zahlen x mit $0 < x < 1$.
- Betrachten wir die Abbildung f mit $f(x) = \frac{1}{x} - 1$.
- Dann trifft die Funktion f jede positive reelle Zahl.

Beispiel: Intervalle reeller Zahlen sind so groß wie $\mathbb{R}$

- Betrachten wir etwa das Intervall $(0, 1)$, also die reellen Zahlen x mit $0 < x < 1$.
- Betrachten wir die Abbildung f mit $f(x) = \frac{1}{x} - 1$.
- Dann trifft die Funktion f jede positive reelle Zahl.
- Also sind das Intervall $(0, 1)$ und $\mathbb{R}$ in diesem Sinne gleich groß.

Beispiel: Intervalle reeller Zahlen sind so groß wie $\mathbb{R}$

- Betrachten wir etwa das Intervall $(0,1)$, also die reellen Zahlen x mit $0 < x < 1$.
- Betrachten wir die Abbildung f mit $f(x) = \frac{1}{x} - 1$.
- Dann trifft die Funktion f jede positive reelle Zahl.
- Also sind das Intervall $(0,1)$ und $\mathbb{R}$ in diesem Sinne gleich groß.
- Man überlegt sich leicht, dass man dies ähnlich für beliebige Intervalle (x,y) mit $x < y$ zeigen kann.

Gödel hat 1938 gezeigt:

Die Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese

Gödel hat 1938 gezeigt:

Die Kontinuumshypothese lässt sich nicht widerlegen: Ist die Mathematik widerspruchsfrei, so bleibt sie das auch, wenn wir zusätzlich die Wahrheit der Kontinuumshypothese annehmen.

Die Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese

Gödel hat 1938 gezeigt:

Die Kontinuumshypothese lässt sich nicht widerlegen: Ist die Mathematik widerspruchsfrei, so bleibt sie das auch, wenn wir zusätzlich die Wahrheit der Kontinuumshypothese annehmen.

Es hat dann 25 Jahre gedauert, bis Paul Cohen 1963 deren Unabhängigkeit zeigen konnte:

Die Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese

Gödel hat 1938 gezeigt:

Die Kontinuumshypothese lässt sich nicht widerlegen: Ist die Mathematik widerspruchsfrei, so bleibt sie das auch, wenn wir zusätzlich die Wahrheit der Kontinuumshypothese annehmen.

Es hat dann 25 Jahre gedauert, bis Paul Cohen 1963 deren Unabhängigkeit zeigen konnte:

Die Kontinuumshypothese lässt sich auch nicht beweisen: Ist die Mathematik widerspruchsfrei, so bleibt sie das auch, wenn wir annehmen, dass die Kontinuumshypothese falsch sei.

Grobe Beweisideen

- Gödel hat für seinen Beweis ein *minimales mathematisches Universum* Schritt für Schritt konstruiert, indem er jeweils nur neue Objekte erlaubte, wenn diese auf Basis der Axiome zwingend nötig sind.

Grobe Beweisideen

- Gödel hat für seinen Beweis ein *minimales mathematisches Universum* Schritt für Schritt konstruiert, indem er jeweils nur neue Objekte erlaubte, wenn diese auf Basis der Axiome zwingend nötig sind. Es läßt sich dann zeigen, dass in diesem minimalen Universum nur sehr wenige reelle Zahlen existieren und sich deshalb keine Gegenbeispiele zu Cantors Hypothese finden können.

Grobe Beweisideen

- Gödel hat für seinen Beweis ein *minimales mathematisches Universum* Schritt für Schritt konstruiert, indem er jeweils nur neue Objekte erlaubte, wenn diese auf Basis der Axiome zwingend nötig sind. Es läßt sich dann zeigen, dass in diesem minimalen Universum nur sehr wenige reelle Zahlen existieren und sich deshalb keine Gegenbeispiele zu Cantors Hypothese finden können.
- Cohen hat andererseits eine Methode entwickelt - die *Erzwingungsmethode* bzw. *Forcing* - die es erlaubt, zu einem Universum der Mathematik zusätzliche Objekte hinzuzufügen.

Grobe Beweisideen

- Gödel hat für seinen Beweis ein *minimales mathematisches Universum* Schritt für Schritt konstruiert, indem er jeweils nur neue Objekte erlaubte, wenn diese auf Basis der Axiome zwingend nötig sind. Es läßt sich dann zeigen, dass in diesem minimalen Universum nur sehr wenige reelle Zahlen existieren und sich deshalb keine Gegenbeispiele zu Cantors Hypothese finden können.
- Cohen hat andererseits eine Methode entwickelt - die *Erzwingungsmethode* bzw. *Forcing* - die es erlaubt, zu einem Universum der Mathematik zusätzliche Objekte hinzuzufügen. Er fügte also sehr viele zusätzliche reelle Zahlen hinzu.

Grobe Beweisideen

- Gödel hat für seinen Beweis ein *minimales mathematisches Universum* Schritt für Schritt konstruiert, indem er jeweils nur neue Objekte erlaubte, wenn diese auf Basis der Axiome zwingend nötig sind. Es läßt sich dann zeigen, dass in diesem minimalen Universum nur sehr wenige reelle Zahlen existieren und sich deshalb keine Gegenbeispiele zu Cantors Hypothese finden können.
- Cohen hat andererseits eine Methode entwickelt - die *Erzwingungsmethode* bzw. *Forcing* - die es erlaubt, zu einem Universum der Mathematik zusätzliche Objekte hinzuzufügen. Er fügte also sehr viele zusätzliche reelle Zahlen hinzu. Dann läßt sich zeigen, dass die Menge der ursprünglichen reellen Zahlen immer noch nicht abzählbar ist, jedoch auch von kleinerer Größe als die Gesamtheit der reellen Zahlen im erweiterten Universum.

Grobe Beweisideen

- Gödel hat für seinen Beweis ein *minimales mathematisches Universum* Schritt für Schritt konstruiert, indem er jeweils nur neue Objekte erlaubte, wenn diese auf Basis der Axiome zwingend nötig sind. Es läßt sich dann zeigen, dass in diesem minimalen Universum nur sehr wenige reelle Zahlen existieren und sich deshalb keine Gegenbeispiele zu Cantors Hypothese finden können.
- Cohen hat andererseits eine Methode entwickelt - die *Erzwingungsmethode* bzw. *Forcing* - die es erlaubt, zu einem Universum der Mathematik zusätzliche Objekte hinzuzufügen. Er fügte also sehr viele zusätzliche reelle Zahlen hinzu. Dann läßt sich zeigen, dass die Menge der ursprünglichen reellen Zahlen immer noch nicht abzählbar ist, jedoch auch von kleinerer Größe als die Gesamtheit der reellen Zahlen im erweiterten Universum. Somit ist die Kontinuumshypothese in solchen Universen falsch.

Erzwingbarkeit der Kontinuumshypothese

- Die Kontinuumshypothese gilt jedoch nicht nur in Gödel's minimalem Universum der Mathematik.

Erzwingbarkeit der Kontinuumshypothese

- Die Kontinuumshypothese gilt jedoch nicht nur in Gödel's minimalem Universum der Mathematik.
- Jedes Universum der Mathematik lässt sich durch Forcing auch zu einem mathematischen Universum *vergrößern*, in welchem die Kontinuumshypothese gilt.

Erzwingbarkeit der Kontinuumshypothese

- Die Kontinuumshypothese gilt jedoch nicht nur in Gödel's minimalem Universum der Mathematik.
- Jedes Universum der Mathematik lässt sich durch Forcing auch zu einem mathematischen Universum *vergrößern*, in welchem die Kontinuumshypothese gilt.
- Gibt es in unserem mathematischen Universum sehr viele reelle Zahlen, so lässt sich trotzdem mittels Forcing eine Identifikation derer Gesamtheit mit der kleinstmöglichen Größe reeller Zahlen hinzufügen, ohne neue reelle Zahlen hinzuzufügen.

Erzwingbarkeit der Kontinuumshypothese

- Die Kontinuumshypothese gilt jedoch nicht nur in Gödel's minimalem Universum der Mathematik.
- Jedes Universum der Mathematik lässt sich durch Forcing auch zu einem mathematischen Universum *vergrößern*, in welchem die Kontinuumshypothese gilt.
- Gibt es in unserem mathematischen Universum sehr viele reelle Zahlen, so lässt sich trotzdem mittels Forcing eine Identifikation derer Gesamtheit mit der kleinstmöglichen Größe reeller Zahlen hinzufügen, ohne neue reelle Zahlen hinzuzufügen.
- Wir gelangen in dieser Erweiterung dann wie in Gödels minimalen Universum zur Erkenntnis, dass die Kontinuumshypothese gilt.

Präferenzen für die Kontinuumshypothese

- Lässt sich, wie etwa bei der Widerspruchsfreiheit, ein Argument für eine Präferenz bezüglich der Wahrheit oder Falschheit der Kontinuumshypothese finden?

Präferenzen für die Kontinuumshypothese

- Lässt sich, wie etwa bei der Widerspruchsfreiheit, ein Argument für eine Präferenz bezüglich der Wahrheit oder Falschheit der Kontinuumshypothese finden?
- Dies würde einer Auswahl präferierter mathematischer Universen entsprechen.

Präferenzen für die Kontinuumshypothese

- Lässt sich, wie etwa bei der Widerspruchsfreiheit, ein Argument für eine Präferenz bezüglich der Wahrheit oder Falschheit der Kontinuumshypothese finden?
- Dies würde einer Auswahl präferierter mathematischer Universen entsprechen.
- Gödel's minimales Universum gilt im Allgemeinen nicht als guter Kandidat für ein präferiertes mathematisches Universum, da gerade dessen Minimalität die Existenz vieler großer und vieler interessanter mathematischer Objekte ausschließt.

Präferenzen für die Kontinuumshypothese

- Lässt sich, wie etwa bei der Widerspruchsfreiheit, ein Argument für eine Präferenz bezüglich der Wahrheit oder Falschheit der Kontinuumshypothese finden?
- Dies würde einer Auswahl präferierter mathematischer Universen entsprechen.
- Gödel's minimales Universum gilt im Allgemeinen nicht als guter Kandidat für ein präferiertes mathematisches Universum, da gerade dessen Minimalität die Existenz vieler großer und vieler interessanter mathematischer Objekte ausschließt.
- Die Tatsache, dass jedes Universum mittels Forcing zu einem Universum der Kontinuumshypothese, aber andererseits auch zu einem Universum in dem diese falsch ist erweitert werden kann, macht eine solche Präferenz sehr schwierig argumentierbar.

Andere unentscheidbare Probleme

- Wie eine Vielzahl an Resultaten aus der Mengenlehre aber zeigt, gibt es neben der Kontinuumshypothese noch viele andere natürliche mathematische Fragestellungen, die unentscheidbar sind.

Andere unentscheidbare Probleme

- Wie eine Vielzahl an Resultaten aus der Mengenlehre aber zeigt, gibt es neben der Kontinuumshypothese noch viele andere natürliche mathematische Fragestellungen, die unentscheidbar sind.
- Z.B.: Die Suslin-Hypothese, die Baumeigenschaft, das Whiteheadproblem, kombinatorische Eigenschaften wie etwa $\diamondsuit$ oder $\square$, ...

Andere unentscheidbare Probleme

- Wie eine Vielzahl an Resultaten aus der Mengenlehre aber zeigt, gibt es neben der Kontinuumshypothese noch viele andere natürliche mathematische Fragestellungen, die unentscheidbar sind.
- Z.B.: Die Suslin-Hypothese, die Baumeigenschaft, das Whitehead-problem, kombinatorische Eigenschaften wie etwa $\diamondsuit$ oder $\square$, ...
- Auch die Kontinuumshypothese (oder deren Falschheit) würde die meisten dieser Probleme nicht entscheiden.

Andere unentscheidbare Probleme

- Wie eine Vielzahl an Resultaten aus der Mengenlehre aber zeigt, gibt es neben der Kontinuumshypothese noch viele andere natürliche mathematische Fragestellungen, die unentscheidbar sind.
- Z.B.: Die Suslin-Hypothese, die Baumeigenschaft, das Whiteheadproblem, kombinatorische Eigenschaften wie etwa $\diamondsuit$ oder $\square$, ...
- Auch die Kontinuumshypothese (oder deren Falschheit) würde die meisten dieser Probleme nicht entscheiden.
- Somit stellt sich auch die Frage, warum man gerade für die Kontinuumshypothese eine Präferenz finden sollte, und nicht etwa für eines der (unendlich vielen) anderen unentscheidbaren Probleme.

Unentscheidbarkeit in der Mathematik

- Die meisten Fragestellungen, die in der mathematischen Praxis (außerhalb der Mengenlehre) auftauchen, sind jedoch entscheidbar.

Unentscheidbarkeit in der Mathematik

- Die meisten Fragestellungen, die in der mathematischen Praxis (außerhalb der Mengenlehre) auftauchen, sind jedoch entscheidbar.
- Insbesondere kann der Wahrheitswert einer grossen Klasse von Problemen, welche als ausreichend einfache Fragen über reelle Zahlen formuliert werden können, nicht durch die zur Zeit bekannten mengentheoretischen Konstruktionen, wie etwa die Erzwingungsmethode oder den Übergang zu Gödel's minimalem Universum, verändert werden.

Unentscheidbarkeit in der Mathematik

- Die meisten Fragestellungen, die in der mathematischen Praxis (außerhalb der Mengenlehre) auftauchen, sind jedoch entscheidbar.
- Insbesondere kann der Wahrheitswert einer grossen Klasse von Problemen, welche als ausreichend einfache Fragen über reelle Zahlen formuliert werden können, nicht durch die zur Zeit bekannten mengentheoretischen Konstruktionen, wie etwa die Erzwingungsmethode oder den Übergang zu Gödel's minimalem Universum, verändert werden.
- Zu diesen *einfach formulierbaren Fragen* zählen auch bekannte, bislang ungelöste mathematische Probleme, wie etwa die Riemannhypothese oder P=NP.