BEISPIELTHEMEN FÜR SEMINAR- UND BACHELORARBEITEN

JAKOB KELLNER

Die folgenden Themen sind nur Beispiele. Die Schwierigkeitsgrade sind sehr unterschiedlich.

Es ist nicht garantiert, dass ich jedes Thema betreue (insbesondere wenn dasselbe oder ein ähnliches thema innerhalb der letzten Jahre bereits für eine Seminar- oder Bachelorarbeit betreut wurde), und ich kann natürlich auch Themen betreuen die nicht in der Liste sind; in jedem Fall nur nach Absprache.

Mehrere Seminararbeits-Themen können potentiell zu einem übergreifenden Bachelor-Thema zusammengefasst werden.

Naive Mengenlehre, Mass und Kategorie

- (Seminararbeit) Schröder-Bernstein-Satz ($|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |A|$ impliziert $|A| = |B|$), Beispiele bei denen der Satz mit zusätzlicher Strujtur funktioniert, und Beispiele bei denen nicht.
- (Seminararbeit) Äquivalenz zum Auswahlaxiom: Jeder Vektorraum hat eine Basis. (wurde 2023 vergeben)
- (Seminararbeit) Darstellungen der reellen Zahlen.
  Folgende Objekte können alle als eine Version des Kontinuums interpretiert werden: Die 0-1 Folgen in 2^ω, Folgen natürlicher Zahlen ω^ω , das abgeschlossene Intervall $[0, 1]$, das offene Intervall $(0, 1)$, die reellen Zahlen $\mathbb{R}$, verschiedene Spiele. Untersuche, inwieweit sich diese Darstellungen unterscheiden bzw. ähneln (Kardinalität, maßtheoretisch, topologisch, ...).
- (Seminararbeit) Polnische Räume und projektive Mengen.
  Definiere polnische Räume, die Borel-Hierarchie und analytische Mengen. Es gibt universelle offene und analytische Mengen, aber keine universellen Borelmengen. Je zwei perfekte polnische Räume sind Borel-äquivalent.
- (Seminararbeit) Das Banach-Tarski-Paradoxon.
  Eine Folgerung des Auswahlaxioms: Eine Kugel mit Radius 1 im dreidimensionalen Raum kann in 5 Teile zerteilt werden und jeder der Teile kann so rotiert und verschoben werden, dass sich daraus eine Kugel mit Radius 2 ergibt. Folgerungen für mögliche Maßbegriffe im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$, vergleich mit $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$.
- Folgerungen aus der Kontinuumshypothese. (Das erste Hilbert'sche Problem.)
  Die Kontinuumshypothese CH ist (in ZFC) unentscheidbar. Aus CH folgen sehr einfach viele attraktive mathematische Resultate (viele davon stellen sich ebenfalls als unentscheidbar heraus). Beispiele: Es gibt eine Bijektion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so daß $f(f(x)) = x$ und so daß A eine Nullmenge ist gdw

Date: Stand: 2024.

$f[A]$ mager ist. Es gibt eine eine überabzählbare Menge M, so dass jede Lebesgue-Nullmenge $N \subseteq M$ abzählbar ist, analoges gilt auch für Mengen erster Kategorie (magere Mengen) anstelle von Nullmengen. Gib Beispiele für Resultate an die man mit CH beweisen kann. Was ist mit "Es gibt eine überabzählbare Menge ohne perfekte Teilmenge"?
- (Bachelorarbeit) Mehrere der vorigen Punkte in einen gemeinsamen Rahmen gebracht (z.B.: "Auswahlaxiom").
- (Seminararbeit) Unendliche Kombinatorik, Satz von Ramsey.
  Ein bekannter Satz der endlichen Kombinatorik besagt informal: In jeder Gruppe von 6 Personen gibt es 3 Personen, die einander alle paarweise nicht kennen oder alle paarweise kennen. Allgemein gibt es $n(m, k, l)$, so dass für jede Färbung der m-Tupel einer $n(m, k, l)$-elementigen Menge A eine l-elementige homogene Teilmenge $B \subseteq A$ existiert. Diese Sätze haben verschiedene unendliche Versionen.

Axiomatische Mengenlehre.

- (Seminararbeit) ZFC (Das erststufige Axiomensystem der Mengenlehre).
  Die Notwendigkeit der Axiomatisierung (Russell'sches Paradoxon), Nachteile der erststufigen Axiomatisierung, Unvollständigkeit.
- (Seminararbeit) Der Satz von Cantor Bendixson, Cantormengen.
  Zeige: Jede perfekte Menge hat Kardinalität $2^{\aleph_0}$, und jede überabzählbare abgeschlossene Menge enthält eine perfekte Menge. Die Cantormenge ist eine überabzählbare, perfekte, magere Nullmenge. Konstruiere analoge nicht-Nullmengen und zeige damit: Es gibt eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine messbare Menge A, so dass $f^{-1}(A)$ nicht messbar ist.
- (Bachelorarbeit) Martins Axiom (MA) und das Suslin-Problem.
  Definiere (das unentscheidbare Prinzip) MA und beweise damit: $\mathbb{R}$ ist die einzige vollständige, dichte, unbegrenzte lineare Ordnung ohne überabzählbare disjunkte Familie offener Mengen.
- (Bachelorarbeit) Spiele.
  Definition eines unendlichen Spieles, Determiniertheit von Spielen mit offenen und abgeschlossenen (und sogar Borel) Gewinnmengen, das Banach-Mazur-Spiel, Folgerung der Existenz einer perfekten Teilmenge oder der Baire-Eigenschaft aus der Determiniertheit, nicht determinierte Spiele (Ultrafilter, Auswahlaxiom), Axiom of Determinacy (AD).

Die Logik erster Stufe.

- (Seminararbeit) Syntax, Semantik und der Vollständigkeitssatz.
  Untersuche, welche mathematischen Tatsachen sich in der Sprache der ersten Stufe (durch einzelne Formeln oder durch unendliche Satzmengen) ausdrücken lassen und welche nicht. Beschreibe die Unterschiede zwischen Syntax und Semantik (insbesondere die Komplexität des Folgerungsbegriffs). Beschreibe die Bedeutung des Vollständigkeitssatzes.
- (Seminararbeit) Der Unvollständigkeitssatz.
  Beschreibe und Beweise Varianten des Unvollständigkeitssatzes.
- (Seminararbeit) Die Theorie der algebraisch abgeschlossenen und der reell abgeschlossenen Körper.
  Im Gegensatz zum Unvollständigkeitssatz ist die Theorie der algebraisch abgeschlossenen Körper beziehungsweise der reell abgeschlossenen Körper

in der Sprache $0, 1, +, \cdot$ (bzw $0, 1, +, \cdot, <$) sehr wohl vollständig rekursiv axiomatisierbar. Skizziere einen Beweis. (Benötigt Elemente der Algebra, insbesonders Sturmsche Ketten.)

- (Bachelorarbeit) Wie oben, und zeige zusätzlich: Die worst-case Laufzeit jedes Entscheidungsverfahrens ist notwendigerweise (hyper)exponentiell.
- (Bachelorarbeit) Analog (inklusive Laufzeit) für Presburger Arithmetik, d.h. die Zahlentheorie in der Sprache $0, 1, +$ oder $0, 1, \cdot$.
- (Seminar- oder Bachelorarbeit, je nach Aufwand) Konstruktivismus und Intuitionismus.
  Analysiere Beispiele für „nichtkonstruktive" Beweise in der Mathematik, im speziellen: Tertium non datur (indirekter Beweis), unendliche Mengen, Auswahlaxiom. Argumentiere, inwieweit ein konstruktiver Beweis besser ist als ein nichtkonstruktiver. Es gibt verschiedene alternative Systeme der Mathematik, die manche nichtkonstruktiven Methoden ablehnen, z.B. Intuitionismus. Präsentiere Gödels Beweis der intuitionistischen Beweisbarkeit der doppelten Negation einer klassischen Formel und analysiere die Folgerungen für Konsistenzüberlegungen.

Rekursionstheorie.

- (Seminararbeit) Äquivalenz der natürlichen Maschinenmodelle:
  Zeige die Äquivalenz (und Robustheit unter verschiedenen Komplexitätsklassen) der folgenden Maschinenmodelle: Universelle Registermaschine, Turingmaschine, μ-Rekursion.
- (Seminar- oder Bachelorarbeit) Das P-NP-Problem.
  Definiere das P-NP-Problem, beschreibe einige NP-Algorithmen und zeige die NP-Vollständigkeit der aussagenlogischen Erfüllbarkeit.
- (Seminar- oder Bachelorarbeit, je nach Aufwand) Orakel, die Turinggrade.
  Es gibt unentscheidbare Probleme, z.B. das Halteproblem H. Man kann eine neues Maschinenmodell M definieren, in dem die Entscheidung $n \in H$ als Grundfunktion zur Verfügung steht. Diese Maschine M kann offenbar mehr berechnen als eine Turingmaschine, aber offenbar auch nicht alles: So hat M ihr eigenes M-unentscheidbares Halteproblem. Das führt zu einer partiellen Ordnung der Grade der Unberechenbarkeit. Untersuche diese Ordnung.
- (Seminararbeit) Das Wortproblem in Gruppen ist unentscheidbar. (D.h. die Frage „G sei die Gruppe definiert durch die Erzeuger $a_1, \dots, a_n$ und die Gleichungen $t_1 = 0, \dots, t_n = 0$. Ist der Term t_1 gleich dem Term t_2?" ist algorithmisch unentscheidbar.) Skizziere den Beweis.
- (Bachelorarbeit) (Hilberts 10. Problem) Es gibt keinen Algorithmus, der allgemeine Diophantische Gleichungen löst. (D.h. die Frage „Hat das Polynom $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ mit ganzzahligen Koeffizienten eine ganzzahlige Lösung?" ist algorithmisch unentscheidbar.) Skizziere den Beweis.
- (Bachelorarbeit+) Quantencomputer: Skizziere die Grundlagen und den Shor-Algorithmus. Die zugrundeliegende Physik kann (aber muss nicht) als blackbox verwendet werden.

Modelltheorie.

- (Bachelorarbeit) Beweise den Hilbert'schen Nullstellensatz mit Methoden aus der Modelltheorie.

URL: `https://dmg.tuwien.ac.at/kellner/`