A

Wednesday, June 09, 2010
19:24

Ziegler Skriptum S3 – 16, mit folgenden Zusätzen:

<u>Def.</u> Sei Σ Menge von L-Sätzen.

$\mathcal{M}$ ist Σ-Modell $:\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}$ ist L-Struktur, und $\mathcal{M} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Sigma$

Σ ist erfüllbar $:\Leftrightarrow$ es gibt ein Σ-Modell

$\Sigma \models \varphi$ $:\Leftrightarrow$ Jedes Σ-Modell erfüllt φ ("semantische Folgerung")

$\perp$ ist die Abkürzung für $(\forall x\ x=x)$

($\perp$ wird auch schlicht als "Widerspruch" bezeichnet)

<u>Beispiel</u>: (·) $\models \varphi$ gdw $\{\} \models \varphi$ ($\{\}$ .. leere Menge)

(·) $\Sigma = \{\psi_1 .. \psi_n\}$ (endl.) Dann $\Sigma \models \varphi$ gdw $\models (\psi_1 \wedge .. \wedge \psi_n) \rightarrow \varphi$

(·) $\Sigma \models \varphi$ gdw $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ unerfüllbar

(·) Σ ist unerfüllbar gdw $\Sigma \models \perp$ gdw ($\Sigma \models \varphi$ für jede L-Formel φ)

(Bew trivial)

<u>Bsp</u>: Für Σ die Gruppenaxiome heisst $\Sigma \models \varphi$ schlicht: "φ gilt in jeder Gruppe"

Def: <u>$\Sigma \vdash \varphi$</u> ... Es gibt einen Beweis s von φ, der als Axiome zusätzl. alle El von Σ verwenden kann; dh:

s ist endl Folge von Formeln $\psi_1, .. \psi_n$

Jedes ψ_i ist entweder logisches Axiom B1–B3 oder nichtlog. Ax. (Element von Σ) oder geht aus ψ_l, ψ_k ($l,k<i$) durch Anwendung von B4 oder B5 hervor.

Σ <u>konsistent</u> $:\Leftrightarrow \Sigma \nvdash \perp$

<u>Beispiel</u> (·) $\Sigma \vdash \varphi \Leftrightarrow \exists \Sigma' \subseteq \Sigma$ endl. sd $\Sigma' \vdash \varphi$

(·) Σ konsistent $\Leftrightarrow$ Jede endl TM $\Sigma' \subseteq \Sigma$ konsistent

(Bew: trivial)

Thursday, June 10, 2010
15:20

Es gilt: $\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow \Sigma \models \varphi$ (Kalkül ist korrekt)

Bew: Einfach nachprüfen dass log. Ax. allgemeingültig sind, und daß aus Σ-Folgerungen mit B4 und B5 auch wieder Σ-Folgerungen entstehen.

Folgerung: Jede erfüllbare Menge Σ ist konsistent

Behauptung (Bew. später):

(1) Indir. Bew.: $\psi \vdash \bot \iff \vdash \neg\psi$

(2) allgemeiner: $\{\psi_1, \dots, \psi_n\} \vdash \varphi \iff \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n \vdash \varphi$

$\iff \vdash (\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n) \to \varphi$

Folgerung: $\Sigma \vdash \varphi \iff \exists \psi_1 \dots \psi_n \in \Sigma \quad \vdash (\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n) \to \varphi$

(Das ist Ziegler Ref. auf S. 22)

Der Gödelsche Vollständigkeitssatz

(a) $\models \varphi \iff \vdash \varphi$

(b) $\Sigma \models \varphi \iff \Sigma \vdash \varphi$

(c_1) Jede konsistente Menge Σ hat ein Modell

(c_2) Sei L abzählbar oder endl. Wenn Σ konsistent ist dann hat Σ ein endl. oder abz. Modell.

(c_3) Allgemein: L habe Größe κ.
Dann hat jede kons. Menge Σ ein Modell der Größe $\leq \kappa$.

Klar ist: $c_3 \to c_2$ und $c_3 \to c_1$, $b \to a$,
Wir zeigen jetzt $c_1 \to b$. Der Beweis von c_1 (bzw von c_3, selber Beweis) wird den Rest der Vorlesung in Anspruch nehmen.

$c_1 \to b$: $\Sigma \models \varphi \iff \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ unerfüllb. $\overset{c_1}{\iff}$
$\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ inkons. $\iff \exists \psi_1 \dots \psi_n$ in Σ sd
$\{\psi_1, \dots, \psi_n, \neg\varphi\} \vdash \bot \quad \iff \vdash (\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n \wedge \neg\varphi) \to \bot$
$\underset{\text{(aus. log. Taut.)}}{\iff} \quad \vdash \psi_1 \to (\psi_2 \to (\dots \psi_n \to \varphi) \dots)$
$\Rightarrow$ (n-malige Anwendung von modus ponens)
$\{\psi_1, \dots, \psi_n\} \vdash \varphi$, d.h. $\Sigma \vdash \varphi$

Thursday, June 10, 2010
15:32

Folgerungen:

(1) Kompaktheitssatz: Σ erfüllbar gdw jede endl. TM von Σ erfüllbar

(2) Wenn Σ beliebig große endliche Modelle hat, (d.h. $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \mathcal{M} \models \Sigma$ sd $|M| > n$), dann hat Σ ein unendliches Modell

(3) Wenn L abzählbar (oder endl.) ist, und Σ ein unendliches Modell hat, dann hat Σ ein Modell in jeder unendlichen Größe

Allgemeiner:

(Satz von Skolem Löwenheim) Wenn L die Größe κ hat, $\lambda \geq \kappa$, und Σ ein unendliches Modell hat, dann auch eines der Größe λ.

Bew: (1) erfüllbar $\Leftrightarrow$ konsistent.

(2) Erweitere L um neue Konstantensymbole $c_0, c_1, \ldots$ und Σ um die Sätze $c_i \neq c_j$ (für $i \neq j$). Sei Σ' die neue Menge. Σ' ist konsistent: Sei $\tilde{\Sigma}$ endl. TM von Σ', dann gibt es n sd $\tilde{\Sigma}$ nur über $c_0 \ldots c_{n-1}$ spricht. Es gibt ein Modell $\mathcal{M}$ von Σ mit mehr als n Elementen. $\mathcal{M}$ kann also zu einem Σ' Modell erweitert werden (die c_i müssen einfach verschiedenen Elementen von M zugeteilt werden). $\tilde{\Sigma}$ ist also konsistent. Daher ist Σ' konsistent, und hat ein Modell; notwendigerweise unendl.

(3) Sei $\lambda \geq \kappa$, Erweitere L um $(c_i)_{i \in \lambda}$ (neue Konstanten), erw. Σ zu Σ' durch $c_i \neq c_j$ ($i \neq j$ in λ). Wie oben ist Σ' konsistent, $L \cup (c_i)_{i \in \lambda}$ hat Größe λ, daher gibt es ein Modell der Größe $\leq \lambda$ (nach c3); da die Konstanten c_i paarweise verschieden sind ist die Größe $= \lambda$.

Anwendung:

Nonstandard Modelle Sei $L = \{+, \cdot, 0, 1, <\}$

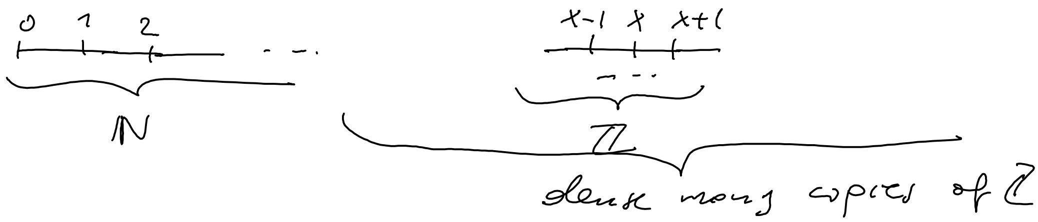
Sei $T = Th(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, <) = \{\varphi \text{ } L\text{-Satz}: \mathbb{N} \models \varphi\}$

Sei $L' = L \cup \{c\}$ (neues Konstantensymbol)

Sei $T' = T \cup \{c > 1, c > 1+1, c > 1+1+1, \ldots\}$

Offensichtlich ist T' konsistent (jede endl. TM ist konsistent, weil $\mathbb{N}$ ein Modell ist), also hat T' ein Modell:

Die Ordnung von T' schaut in etwa so aus:



T' hat unendl. große Elemente, und erfüllt genau die Sätze die in $\mathbb{N}$ gelten.

Thursday, June 10, 2010
16:21

Beweisbarkeit:

Def: Σ vollständig :$\Leftrightarrow$ Für jeden L-Satz φ gilt:
$\Sigma \vdash \varphi$ oder $\Sigma \vdash \neg\varphi$ & Σ ist konsistent

Sei $\mathcal{M}$ L-Struktur. $Th(\mathcal{M}) = \{\varphi : \mathcal{M} \models \varphi\}$

Sei Σ Satzmenge. $Th(\Sigma) = \{\varphi : \Sigma \vdash \varphi\}$

Sei T vollst. Σ axiomatisiert T :$\Leftrightarrow$ $T = Th(\Sigma)$
($\Rightarrow$ Σ vollständig)

Es gilt: (·) Σ r.e. $\Rightarrow$ $\{\varphi : \Sigma \vdash \varphi\}$ r.e.

(·) Σ r.e. und vollst. $\Rightarrow$ $\{\varphi : \Sigma \vdash \varphi\}$ rekursiv

(Bew: offensichtlich. Die tatsächliche Kodierung ist etwas mühsam)

Folgerung (aus obigem + Unlösbarkeit von 10. Hilbertschen Problem): Für $L = \{0, 1, +, \cdot\}$ ist $Th(\mathbb{Z})$ nicht r.e. axiomatisierbar.

("Bew": Wir können jedes Polynom p effektiv in einen Satz $\varphi_p = \exists x_1 \ldots x_{17}\ p(x_1 \ldots x_{17}) = 0$ übersetzen; wäre $Th(\mathbb{Z})$ rekursiv dann wäre entscheidbar ob $\varphi_p \in Th(\mathbb{Z})$ d.h. ob p eine ganzz. Nullstelle hat.)

Es gilt (ohne Beweis). Sei L endlich, enth. mindestens ein mindestens 2stelliges Relationssymb.
Dann ist $\{\varphi : \vdash \varphi\}$ nicht rekursiv.

Folgerung: $\{\varphi : \varphi$ erfüllbar$\}$ ist nicht r.e.

(Bew: $\{\varphi : \vdash \varphi\}$ r.e., daher $\{\varphi : \vdash \neg\varphi\}$ r.e., d.h. $\{\varphi : \varphi$ unerfüllbar$\}$ r.e. Wäre $\{\varphi : \varphi$ erfüllbar$\}$ r.e., dann wäre $\{\varphi : \vdash \neg\varphi\}$ rekursiv, und damit $\{\varphi : \vdash \varphi\}$ (weil $\vdash \varphi$ gdw $\vdash \neg(\neg\varphi)$)

Thursday, June 10, 2010
16:41

Es ist also i.A. $Th(\{\})$ nicht rekursiv.
Es gibt aber sehr wohl rekursive Σ sodass $Th(\Sigma)$ rek. ist: natürlich alle inkonsistenten Σ; unter den konsistenten gibt es zB folgende:

(1) DLO (dense linear orders) $L = \{<\}$
$\Sigma = \{<$ ist lin. Ordn. ohne kl. oder gr. El., dicht$\}$
Es gilt: (*) je zwei abzählbare DLO-Modelle sind isomorph (ohne Beweis)

Daraus folgt: Σ ist vollständig
(Bew: sonst $\Sigma \not\vdash \varphi$, $\Sigma \not\vdash \neg\varphi$, d.h. $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ und $\Sigma \cup \{\varphi\}$ konsistent mit abzählbaren Modellen M_1 und M_2, M_1 und M_2 sind isom., erfüllen also dieselben Sätze, ↯)
Es ist also $Th(\Sigma) = Th(\mathbb{Q}, <)$

(2) Presburger Arithmetik $L = \{0, 1, +\}$
$Th(\mathbb{N}, 0, 1, +)$ ist rekursiv.
(Entscheidungsalgorithmus ist aber enorm aufwendig, (Laufzeit hyperexponentiell)
Analog für $Th(\mathbb{N}, 0, 1, \cdot)$ und für $Th(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, <)$ oder $Th(\mathbb{C}, 0, 1, +, \cdot)$
("reell abg." bzw "alg. abg. Körper")

(3) Sobald aber $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ in der Theorie Σ kodiert werden kann, kann $Th(\Sigma)$ nicht rekursiv sein
(1. Gödelscher Unvollständigkeitssatz)
ebenfalls unentscheidbar: (first order theorien der) Körper, Gruppen, Halbgruppen, ...

(4) Bsp für rek. aber unvollst. Σ:
Theorie der Booleschen Algebren etc.

Monday, June 14, 2010
17:29

NEU:

Generell: $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ sind isomorph $\Rightarrow$
$Th(\mathcal{M}) = Th(\mathcal{N})$ ("$\mathcal{M}, \mathcal{N}$ elementar äquiv.")

Umkehrung gilt nicht:

(a) Wenn $\mathcal{M}$ unendliches Modell hat, dann auch Modell $\mathcal{N}$ in anderer Kardinalität ($\Rightarrow \mathcal{M}, \mathcal{N}$ nicht isomorph)

(b) Für fixe Kardinalität κ (zB: abzählbar) gibt es Theorien T sd je zwei T-Modelle der Größe κ isomorph sind ("T ist κ-kategorisch")

Bsp1: DLO ist $\aleph_0$-kategorisch, aber nicht $|\mathbb{R}|$-kategorisch: $\mathbb{Q} + \mathbb{R} \ncong \mathbb{R}$ (warum?)

Bsp2: "alg. abg. Körper mit char. 0" sind κ-kateg. für alle $\kappa > \aleph_0$, aber nicht $\aleph_0$-kategorisch.

Bem: Satz aus Modelltheorie:
T ist κ-kategorisch für ein $\kappa > \aleph_0$
$\Rightarrow T$ — " — alle $\kappa > \aleph_0$