Clones in der Universellen Algebra

Michael Pinsker

Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie
TU Wien

Wissenswertes aus der Mathematik

21. Mai 2007

Klone

$X \dots$ Grundmenge (unendlich oder unendlich).

$\mathcal{O}^{(n)} := X^{X^n} = \{f : X^n \to X\} \dots$ n-stellige Operationen auf X.

$\mathcal{O} := \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{O}^{(n)} \dots$ endlichstellige Operationen auf X.

Klone

$X \ldots$ Grundmenge (unendlich oder unendlich).

$\mathcal{O}^{(n)} := X^{X^n} = \{f : X^n \to X\} \ldots$ n-stellige Operationen auf X.

$\mathcal{O} := \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{O}^{(n)} \ldots$ endlichstellige Operationen auf X.

Definition

$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{O}$ Klon (engl. clone) $\leftrightarrow$

Klone

$X \ldots$ Grundmenge (unendlich oder unendlich).

$\mathcal{O}^{(n)} := X^{X^n} = \{f : X^n \to X\} \ldots$ n-stellige Operationen auf X.

$\mathcal{O} := \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{O}^{(n)} \ldots$ endlichstellige Operationen auf X.

Definition

$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{O}$ Klon (engl. clone) $\leftrightarrow$

- $\mathcal{C}$ enthält die Projektionen, und
- $\mathcal{C}$ ist unter Komposition abgeschlossen.

Klone

$X \ldots$ Grundmenge (unendlich oder unendlich).

$\mathcal{O}^{(n)} := X^{X^n} = \{f : X^n \to X\} \ldots$ n-stellige Operationen auf X.

$\mathcal{O} := \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{O}^{(n)} \ldots$ endlichstellige Operationen auf X.

Definition

$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{O}$ Klon (engl. clone) $\leftrightarrow$

- $\mathcal{C}$ enthält die Projektionen, und
- $\mathcal{C}$ ist unter Komposition abgeschlossen.

Projektionen: Für alle $1 \leq k \leq n$, die Operation $\pi_k^n(x_1, \ldots, x_n) = x_k$.

Klone

$X \ldots$ Grundmenge (unendlich oder unendlich).

$\mathcal{O}^{(n)} := X^{X^n} = \{f : X^n \to X\} \ldots$ n-stellige Operationen auf X.

$\mathcal{O} := \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{O}^{(n)} \ldots$ endlichstellige Operationen auf X.

Definition

$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{O}$ Klon (engl. clone) $\leftrightarrow$

- $\mathcal{C}$ enthält die Projektionen, und
- $\mathcal{C}$ ist unter Komposition abgeschlossen.

Projektionen: Für alle $1 \leq k \leq n$, die Operation $\pi_k^n(x_1, \ldots, x_n) = x_k$.

Komposition: Wenn $f \in \mathcal{C}$ n-stellig und $g_1, \ldots, g_n \in \mathcal{C}$ m-stellig, dann ist $f(g_1, \ldots, g_n) : (x_1, \ldots, x_m) \mapsto f(g_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_m))$ auch in $\mathcal{C}$.

Beispiele von Klonen

- Der *volle Klon* $\mathcal{O}$.
- Die Menge $\mathcal{J}$ aller Projektionen auf X.
- Für eine Halbordnung $\leq$ auf X: Die Menge aller bezüglich $\leq$ monotonen Operationen.
- Allgemeiner: Für eine Indexmenge I (endlich oder unendlich) und eine Relation $\theta \subseteq X^I$: Die Menge aller Operationen, die θ erhalten. Jeder Klon läßt sich so darstellen.
- Die Menge aller *idempotenten* Operationen (also jener Operationen f, die der Gleichung $f(x, \ldots, x) = x$ genügen).

Beispiele von Klonen

- Der *volle Klon* $\mathcal{O}$.
- Die Menge $\mathcal{J}$ aller Projektionen auf X.
- Für eine Halbordnung $\leq$ auf X: Die Menge aller bezüglich $\leq$ monotonen Operationen.
- Allgemeiner: Für eine Indexmenge I (endlich oder unendlich) und eine Relation $\theta \subseteq X^I$: Die Menge aller Operationen, die θ erhalten. Jeder Klon läßt sich so darstellen.
- Die Menge aller *idempotenten* Operationen (also jener Operationen f, die der Gleichung $f(x, \ldots, x) = x$ genügen).

Beispiele von Klonen

- Der *volle Klon* $\mathcal{O}$.
- Die Menge $\mathcal{J}$ aller Projektionen auf X.
- Für eine Halbordnung $\leq$ auf X: Die Menge aller bezüglich $\leq$ monotonen Operationen.
- Allgemeiner: Für eine Indexmenge I (endlich oder unendlich) und eine Relation $\theta \subseteq X^I$: Die Menge aller Operationen, die θ erhalten. Jeder Klon läßt sich so darstellen.
- Die Menge aller *idempotenten* Operationen (also jener Operationen f, die der Gleichung $f(x, \ldots, x) = x$ genügen).

Beispiele von Klonen

- Der *volle Klon* $\mathcal{O}$.
- Die Menge $\mathcal{J}$ aller Projektionen auf X.
- Für eine Halbordnung $\leq$ auf X: Die Menge aller bezüglich $\leq$ monotonen Operationen.
- Allgemeiner: Für eine Indexmenge I (endlich oder unendlich) und eine Relation $\theta \subseteq X^I$: Die Menge aller Operationen, die θ erhalten. Jeder Klon läßt sich so darstellen.
- Die Menge aller *idempotenten* Operationen (also jener Operationen f, die der Gleichung $f(x, \ldots, x) = x$ genügen).

Beispiele von Klonen

- Der *volle Klon* $\mathcal{O}$.
- Die Menge $\mathcal{J}$ aller Projektionen auf X.
- Für eine Halbordnung $\leq$ auf X: Die Menge aller bezüglich $\leq$ monotonen Operationen.
- Allgemeiner: Für eine Indexmenge I (endlich oder unendlich) und eine Relation $\theta \subseteq X^I$: Die Menge aller Operationen, die θ erhalten. Jeder Klon läßt sich so darstellen.
- Die Menge aller *idempotenten* Operationen (also jener Operationen f, die der Gleichung $f(x, \ldots, x) = x$ genügen).

Beispiele von Klonen

- Der *volle Klon* $\mathcal{O}$.
- Die Menge $\mathcal{J}$ aller Projektionen auf X.
- Für eine Halbordnung $\leq$ auf X: Die Menge aller bezüglich $\leq$ monotonen Operationen.
- Allgemeiner: Für eine Indexmenge I (endlich oder unendlich) und eine Relation $\theta \subseteq X^I$: Die Menge aller Operationen, die θ erhalten. Jeder Klon läßt sich so darstellen.
- Die Menge aller *idempotenten* Operationen (also jener Operationen f, die der Gleichung $f(x, \ldots, x) = x$ genügen).

Beispiele von Klonen

- Der *volle Klon* $\mathcal{O}$.
- Die Menge $\mathcal{J}$ aller Projektionen auf X.
- Für eine Halbordnung $\leq$ auf X: Die Menge aller bezüglich $\leq$ monotonen Operationen.
- Allgemeiner: Für eine Indexmenge I (endlich oder unendlich) und eine Relation $\theta \subseteq X^I$: Die Menge aller Operationen, die θ erhalten. Jeder Klon läßt sich so darstellen.
- Die Menge aller *idempotenten* Operationen (also jener Operationen f, die der Gleichung $f(x, \ldots, x) = x$ genügen).

Beispiele von Klonen (Fortsetzung)

- Die Menge aller konservativen Operationen (eine Operation f heißt *konservativ* $\leftrightarrow f(x_1, \ldots, x_n) \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ für alle $x_1, \ldots, x_n \in X$).
- Für eine Algebra $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{F})$, die Menge ihrer Endomorphismen, also jener Operationen, die mit allen Operationen von $\mathfrak{X}$ kommutieren.
- Für einen topologischen Raum $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{T})$, die Menge aller stetigen Operationen in $\mathcal{O}$ (X^n hat die Produkttopologie).
- Für eine Algebra $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{F})$, die Menge aller Polynomfunktionen von $\mathfrak{X}$.
- Für eine Algebra $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{F})$, die Menge aller Termoperationen von $\mathfrak{X}$. Jeder Klon läßt sich so darstellen.

Beispiele von Klonen (Fortsetzung)

- Die Menge aller konservativen Operationen (eine Operation f heißt *konservativ* $\leftrightarrow f(x_1, \ldots, x_n) \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ für alle $x_1, \ldots, x_n \in X$).
- Für eine Algebra $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{F})$, die Menge ihrer Endomorphismen, also jener Operationen, die mit allen Operationen von $\mathfrak{X}$ kommutieren.
- Für einen topologischen Raum $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{T})$, die Menge aller stetigen Operationen in $\mathcal{O}$ (X^n hat die Produkttopologie).
- Für eine Algebra $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{F})$, die Menge aller Polynomfunktionen von $\mathfrak{X}$.
- Für eine Algebra $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{F})$, die Menge aller Termoperationen von $\mathfrak{X}$. Jeder Klon läßt sich so darstellen.

Beispiele von Klonen (Fortsetzung)

- Die Menge aller konservativen Operationen (eine Operation f heißt *konservativ* $\leftrightarrow f(x_1,\ldots,x_n) \in \{x_1,\ldots,x_n\}$ für alle $x_1,\ldots,x_n \in X$).
- Für eine Algebra $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{F})$, die Menge ihrer Endomorphismen, also jener Operationen, die mit allen Operationen von $\mathfrak{X}$ kommutieren.
- Für einen topologischen Raum $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{T})$, die Menge aller stetigen Operationen in $\mathcal{O}$ (X^n hat die Produkttopologie).
- Für eine Algebra $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{F})$, die Menge aller Polynomfunktionen von $\mathfrak{X}$.
- Für eine Algebra $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{F})$, die Menge aller Termoperationen von $\mathfrak{X}$. Jeder Klon läßt sich so darstellen.

Beispiele von Klonen (Fortsetzung)

- Die Menge aller konservativen Operationen (eine Operation f heißt *konservativ* $\leftrightarrow f(x_1, \ldots, x_n) \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ für alle $x_1, \ldots, x_n \in X$).
- Für eine Algebra $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{F})$, die Menge ihrer Endomorphismen, also jener Operationen, die mit allen Operationen von $\mathfrak{X}$ kommutieren.
- Für einen topologischen Raum $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{T})$, die Menge aller stetigen Operationen in $\mathcal{O}$ (X^n hat die Produkttopologie).
- Für eine Algebra $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{F})$, die Menge aller Polynomfunktionen von $\mathfrak{X}$.
- Für eine Algebra $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{F})$, die Menge aller Termoperationen von $\mathfrak{X}$. Jeder Klon läßt sich so darstellen.

Beispiele von Klonen (Fortsetzung)

- Die Menge aller konservativen Operationen (eine Operation f heißt *konservativ* $\leftrightarrow f(x_1,\ldots,x_n) \in \{x_1,\ldots,x_n\}$ für alle $x_1,\ldots,x_n \in X$).
- Für eine Algebra $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{F})$, die Menge ihrer Endomorphismen, also jener Operationen, die mit allen Operationen von $\mathfrak{X}$ kommutieren.
- Für einen topologischen Raum $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{T})$, die Menge aller stetigen Operationen in $\mathcal{O}$ (X^n hat die Produkttopologie).
- Für eine Algebra $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{F})$, die Menge aller Polynomfunktionen von $\mathfrak{X}$.
- Für eine Algebra $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{F})$, die Menge aller Termoperationen von $\mathfrak{X}$. Jeder Klon läßt sich so darstellen.

Beispiele von Klonen (Fortsetzung)

- Die Menge aller konservativen Operationen (eine Operation f heißt *konservativ* $\leftrightarrow f(x_1, \ldots, x_n) \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ für alle $x_1, \ldots, x_n \in X$).
- Für eine Algebra $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{F})$, die Menge ihrer Endomorphismen, also jener Operationen, die mit allen Operationen von $\mathfrak{X}$ kommutieren.
- Für einen topologischen Raum $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{T})$, die Menge aller stetigen Operationen in $\mathcal{O}$ (X^n hat die Produkttopologie).
- Für eine Algebra $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{F})$, die Menge aller Polynomfunktionen von $\mathfrak{X}$.
- Für eine Algebra $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{F})$, die Menge aller Termoperationen von $\mathfrak{X}$. Jeder Klon läßt sich so darstellen.

Klone und universelle Algebra

Klone und universelle Algebra

- Universelle Algebra: Analyse von Eigenschaften von Algebren, die unabhängig von der Sprache sind.

Klone und universelle Algebra

- Universelle Algebra: Analyse von Eigenschaften von Algebren, die unabhängig von der Sprache sind.
- Beispiele: Unteralgebren, Kongruenzen, Automorphismen einer Algebra $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{F})$.

Klone und universelle Algebra

- Universelle Algebra: Analyse von Eigenschaften von Algebren, die unabhängig von der Sprache sind.
- Beispiele: Unteralgebren, Kongruenzen, Automorphismen einer Algebra $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{F})$.
- Zwei Algebren sind äquivalent, wenn ihre Termoperationen übereinstimmen.

Klone und universelle Algebra

- Universelle Algebra: Analyse von Eigenschaften von Algebren, die unabhängig von der Sprache sind.
- Beispiele: Unteralgebren, Kongruenzen, Automorphismen einer Algebra $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{F})$.
- Zwei Algebren sind äquivalent, wenn ihre Termoperationen übereinstimmen.
- Die Termoperationen einer Algebra $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{F})$ bilden einen ein Klon *Term*$(\mathcal{F})$.

Klone und universelle Algebra

- Universelle Algebra: Analyse von Eigenschaften von Algebren, die unabhängig von der Sprache sind.
- Beispiele: Unteralgebren, Kongruenzen, Automorphismen einer Algebra $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{F})$.
- Zwei Algebren sind äquivalent, wenn ihre Termoperationen übereinstimmen.
- Die Termoperationen einer Algebra $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{F})$ bilden einen ein Klon *Term*$(\mathcal{F})$.
- Ist $\mathcal{C}$ ein Klon, so gilt $\mathcal{C} = \mathit{Term}((X, \mathcal{C}))$.

Der Klonverband

Der Klonverband

$\mathrm{Cl}(X) := \{\mathcal{C} \subseteq \mathcal{O} : \mathcal{C} \text{ Klon}\}$.

Der Klonverband

$\mathrm{Cl}(X) := \{\mathcal{C} \subseteq \mathcal{O} : \mathcal{C}$ Klon$\}$.

$(\mathrm{Cl}(X), \subseteq) \ldots$ Verband mit größtem Element $\mathcal{O}$ (=alle Operationen) und kleinstem Element $\mathcal{J}$ (=Projektionen).

Der Klonverband

$\mathrm{Cl}(X) := \{\mathcal{C} \subseteq \mathcal{O} : \mathcal{C} \text{ Klon}\}$.

$(\mathrm{Cl}(X), \subseteq) \ldots$ Verband mit größtem Element $\mathcal{O}$ (=alle Operationen) und kleinstem Element $\mathcal{J}$ (=Projektionen).

$\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathrm{Cl}(X) \to \mathcal{C} \wedge \mathcal{D} = \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$.

Der Klonverband

$\mathrm{Cl}(X) := \{\mathcal{C} \subseteq \mathcal{O} : \mathcal{C} \text{ Klon}\}$.

$(\mathrm{Cl}(X), \subseteq) \ldots$ Verband mit größtem Element $\mathcal{O}$ (=alle Operationen) und kleinstem Element $\mathcal{J}$ (=Projektionen).

$\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathrm{Cl}(X) \rightarrow \mathcal{C} \wedge \mathcal{D} = \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$.

$\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathrm{Cl}(X) \rightarrow \mathcal{C} \vee \mathcal{D} = \mathit{Term}(\mathcal{C} \cup \mathcal{D}) =: \langle \mathcal{C} \cup \mathcal{D} \rangle$.

$\mathrm{Cl}(X) := \{\mathcal{C} \subseteq \mathcal{O} : \mathcal{C} \text{ Klon}\}$.

$(\mathrm{Cl}(X), \subseteq) \ldots$ Verband mit größtem Element $\mathcal{O}$ (=alle Operationen) und kleinstem Element $\mathcal{J}$ (=Projektionen).

$\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathrm{Cl}(X) \to \mathcal{C} \wedge \mathcal{D} = \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$.

$\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathrm{Cl}(X) \to \mathcal{C} \vee \mathcal{D} = \mathit{Term}(\mathcal{C} \cup \mathcal{D}) =: \langle \mathcal{C} \cup \mathcal{D} \rangle$.

Hüllenoperator

$$\langle\rangle : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathcal{O}) & \to & \mathcal{P}(\mathcal{O}) \\ \mathcal{F} & \mapsto & \mathit{Term}(\mathcal{F}) \end{array}$$

Klone die $\langle\rangle$-abgeschlossenen Elemente.

Warum Cl(X) erforschen?

- Natürliches mathematisches Objekt

Warum Cl(X) erforschen?

- Natürliches mathematisches Objekt
- Anwendungen

  Beispiele: Vollständigkeit (universelle Algebra),

  Constraint Satisfaction Problem (theoretische Informatik)

Warum Cl(X) erforschen?

- Natürliches mathematisches Objekt
- Anwendungen

  Beispiele: Vollständigkeit (universelle Algebra),

  Constraint Satisfaction Problem (theoretische Informatik)
- Spielwiese für Methoden (universelle Algebra, Mengenlehre)

Der Klonverband: Elementare Eigenschaften

Der Klonverband: Elementare Eigenschaften

Beliebige Schnitte von Klonen sind Klone $\rightarrow \mathrm{Cl}(X)$ ist *vollständig*.

Beliebige Schnitte von Klonen sind Klone $\rightarrow$ $\mathrm{Cl}(X)$ ist *vollständig*.

Definition

Sei $\mathfrak{L}$ ein vollständiger Verband.
$a \in \mathfrak{L}$ *kompakt* $\leftrightarrow$
für alle $A \subseteq \mathfrak{L}$ mit $a \leq \bigvee A$ existiert $A' \subseteq A$ endlich mit $a \leq \bigvee A'$

Der Klonverband: Elementare Eigenschaften

Beliebige Schnitte von Klonen sind Klone $\rightarrow$ $\mathrm{Cl}(X)$ ist *vollständig*.

Definition

Sei $\mathfrak{L}$ ein vollständiger Verband.
$a \in \mathfrak{L}$ *kompakt* $\leftrightarrow$
für alle $A \subseteq \mathfrak{L}$ mit $a \leq \bigvee A$ existiert $A' \subseteq A$ endlich mit $a \leq \bigvee A'$

$\mathcal{C} \in \mathrm{Cl}(X)$ kompakt $\leftrightarrow$ $\mathcal{C}$ is endlich erzeugt, d.h. es existiert $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}$ endlich mit $\mathcal{C} = \langle \mathcal{F} \rangle$.

Der Klonverband: Elementare Eigenschaften

Beliebige Schnitte von Klonen sind Klone $\rightarrow$ $\mathrm{Cl}(X)$ ist *vollständig*.

Definition

Sei $\mathfrak{L}$ ein vollständiger Verband.
$a \in \mathfrak{L}$ *kompakt* $\leftrightarrow$
für alle $A \subseteq \mathfrak{L}$ mit $a \leq \bigvee A$ existiert $A' \subseteq A$ endlich mit $a \leq \bigvee A'$

$\mathcal{C} \in \mathrm{Cl}(X)$ kompakt $\leftrightarrow$ $\mathcal{C}$ is endlich erzeugt, d.h. es existiert $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}$ endlich mit $\mathcal{C} = \langle \mathcal{F} \rangle$.

Definition

Sei $\mathfrak{L}$ ein vollständiger Verband.
$\mathfrak{L}$ *algebraisch* $\leftrightarrow$
jedes Element ist Supremum von kompakten Elementen.

Der Klonverband: Elementare Eigenschaften

Beliebige Schnitte von Klonen sind Klone $\to$ Cl(X) ist *vollständig*.

Definition

Sei $\mathfrak{L}$ ein vollständiger Verband.
$a \in \mathfrak{L}$ *kompakt* $\leftrightarrow$
für alle $A \subseteq \mathfrak{L}$ mit $a \leq \bigvee A$ existiert $A' \subseteq A$ endlich mit $a \leq \bigvee A'$

$\mathcal{C} \in$ Cl(X) kompakt $\leftrightarrow$ $\mathcal{C}$ is endlich erzeugt, d.h. es existiert $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}$ endlich mit $\mathcal{C} = \langle \mathcal{F} \rangle$.

Definition

Sei $\mathfrak{L}$ ein vollständiger Verband.
$\mathfrak{L}$ *algebraisch* $\leftrightarrow$
jedes Element ist Supremum von kompakten Elementen.

Cl(X) ist algebraisch.

Größe des Klonverbandes

Größe des Klonverbandes

$|X| = 1$: $\mathrm{Cl}(X)$ ist der einelementige Verband.

Größe des Klonverbandes

$|X| = 1$: Cl(X) ist der einelementige Verband.

$|X| = 2$: Cl(X) ist abzählbar unendlich ("Postscher Verband").

Größe des Klonverbandes

$|X| = 1$: $\mathrm{Cl}(X)$ ist der einelementige Verband.

$|X| = 2$: $\mathrm{Cl}(X)$ ist abzählbar unendlich (“Postscher Verband”).

$|X| = 3$: $|\,\mathrm{Cl}(X)| = 2^{\aleph_0}$.

Größe des Klonverbandes

$|X| = 1$: $\mathrm{Cl}(X)$ ist der einelementige Verband.

$|X| = 2$: $\mathrm{Cl}(X)$ ist abzählbar unendlich ("Postscher Verband").

$|X| = 3$: $|\,\mathrm{Cl}(X)| = 2^{\aleph_0}$.

$|X| = 4$: $|\,\mathrm{Cl}(X)| = 2^{\aleph_0}$.

$\vdots$

Größe des Klonverbandes

$|X| = 1$: $\mathrm{Cl}(X)$ ist der einelementige Verband.

$|X| = 2$: $\mathrm{Cl}(X)$ ist abzählbar unendlich ("Postscher Verband").

$|X| = 3$: $|\,\mathrm{Cl}(X)| = 2^{\aleph_0}$.

$|X| = 4$: $|\,\mathrm{Cl}(X)| = 2^{\aleph_0}$.

$\vdots$

X unendlich: $|\,\mathrm{Cl}(X)| = 2^{2^{|X|}}$.

Größe des Klonverbandes

$|X| = 1$: $\mathrm{Cl}(X)$ ist der einelementige Verband.

$|X| = 2$: $\mathrm{Cl}(X)$ ist abzählbar unendlich (“Postscher Verband”).

$|X| = 3$: $|\,\mathrm{Cl}(X)| = 2^{\aleph_0}$.

$|X| = 4$: $|\,\mathrm{Cl}(X)| = 2^{\aleph_0}$.

$\vdots$

X unendlich: $|\,\mathrm{Cl}(X)| = 2^{2^{|X|}}$.

Bemerke:

X endlich, $|X| > 1 \rightarrow |\mathcal{O}| = \aleph_0$.

X unendlich $\rightarrow |\mathcal{O}| = 2^{|X|}$.

Beweis, daß $|\mathrm{Cl}(X)| = 2^{\aleph_0}$ für $3 \leq |X| < \aleph_0$:

Beweis, daß $|\operatorname{Cl}(X)| = 2^{\aleph_0}$ für $3 \leq |X| < \aleph_0$:

Sei $X = \{0, 1, 2\}$. Definiere für alle $n \geq 2$

$$f_n(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & , \exists i(x_i = 1 \wedge \forall j \neq i(x_j = 2)) \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis, daß $|\operatorname{Cl}(X)| = 2^{\aleph_0}$ für $3 \leq |X| < \aleph_0$:

Sei $X = \{0, 1, 2\}$. Definiere für alle $n \geq 2$

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & , \exists i (x_i = 1 \wedge \forall j \neq i (x_j = 2)) \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

$A \subseteq \omega,\ n \notin A \rightarrow f_n \notin \langle \{f_k : k \in A\} \rangle$

Beweis, daß $|\,\mathrm{Cl}(X)| = 2^{\aleph_0}$ für $3 \leq |X| < \aleph_0$:

Sei $X = \{0, 1, 2\}$. Definiere für alle $n \geq 2$

$$f_n(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & , \exists i(x_i = 1 \wedge \forall j \neq i(x_j = 2)) \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

$A \subseteq \omega,\ n \notin A \to f_n \notin \langle\{f_k : k \in A\}\rangle$
Also sind die $\mathcal{C}_A := \langle\{f_k : k \in A\}\rangle$ alle verschieden.

Größe des Klonverbandes (X unendlich)

Beweis, daß $|\,\mathrm{Cl}(X)| = 2^{2^{|X|}}$ für unendliches X:

Größe des Klonverbandes (X unendlich)

Beweis, daß $|\operatorname{Cl}(X)| = 2^{2^{|X|}}$ für unendliches X:

Sei $X = \{0, 1\} \cup A$.

Für alle $B \subseteq A$ sei $f_B \in \mathcal{O}^{(1)}$ die charakteristische Funktion von B.

Größe des Klonverbandes (X unendlich)

Beweis, daß $|\operatorname{Cl}(X)| = 2^{2^{|X|}}$ für unendliches X:

Sei $X = \{0, 1\} \cup A$.

Für alle $B \subseteq A$ sei $f_B \in \mathcal{O}^{(1)}$ die charakteristische Funktion von B.

Für $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(A)$ sei $\quad \mathcal{C}_{\mathcal{B}} := \langle f_B : B \in \mathcal{B} \rangle$.

Größe des Klonverbandes (X unendlich)

Beweis, daß $|\operatorname{Cl}(X)| = 2^{2^{|X|}}$ für unendliches X:

Sei $X = \{0, 1\} \cup A$.

Für alle $B \subseteq A$ sei $f_B \in \mathcal{O}^{(1)}$ die charakteristische Funktion von B.

Für $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(A)$ sei $\quad \mathcal{C}_{\mathcal{B}} := \langle f_B : B \in \mathcal{B} \rangle$.

$B_1, B_2 \subseteq A \rightarrow f_{B_1}(f_{B_2}(x)) = 0$

Größe des Klonverbandes (X unendlich)

Beweis, daß $|\operatorname{Cl}(X)| = 2^{2^{|X|}}$ für unendliches X:

Sei $X = \{0, 1\} \cup A$.

Für alle $B \subseteq A$ sei $f_B \in \mathcal{O}^{(1)}$ die charakteristische Funktion von B.

Für $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(A)$ sei $\quad \mathcal{C}_{\mathcal{B}} := \langle f_B : B \in \mathcal{B} \rangle$.

$B_1, B_2 \subseteq A \rightarrow f_{B_1}(f_{B_2}(x)) = 0$

Also sind die $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ alle verschieden.

Komplexität des Klonverbandes (X endlich)

Satz (Bulatov 1992)

$|X| \geq 3 \to$ der Unterhalbgruppenverband von $(\mathbb{N}, +)$ ist ein Unterverband von $\mathrm{Cl}(X)$.

Komplexität des Klonverbandes (X endlich)

Satz (Bulatov 1992)

$|X| \geq 3 \rightarrow$ der Unterhalbgruppenverband von $(\mathbb{N}, +)$ ist ein Unterverband von $\mathrm{Cl}(X)$.

Korollar

$|X| \geq 3 \rightarrow \mathrm{Cl}(X)$ erfüllt keine nichttrivialen Verbandsidentitäten.

Komplexität des Klonverbandes (X endlich)

Satz (Bulatov 1992)

$|X| \geq 3 \rightarrow$ der Unterhalbgruppenverband von $(\mathbb{N}, +)$ ist ein Unterverband von $\mathrm{Cl}(X)$.

Korollar

$|X| \geq 3 \rightarrow \mathrm{Cl}(X)$ erfüllt keine nichttrivialen Verbandsidentitäten.

Satz (Bulatov 1993)

$|X| \geq 4 \rightarrow$ alle abzählbaren Produkte endlicher Verbände lassen sich in $\mathrm{Cl}(X)$ einbetten.

Komplexität des Klonverbandes (X endlich)

Satz (Bulatov 1992)

$|X| \geq 3 \rightarrow$ der Unterhalbgruppenverband von $(\mathbb{N}, +)$ ist ein Unterverband von $\mathrm{Cl}(X)$.

Korollar

$|X| \geq 3 \rightarrow \mathrm{Cl}(X)$ erfüllt keine nichttrivialen Verbandsidentitäten.

Satz (Bulatov 1993)

$|X| \geq 4 \rightarrow$ alle abzählbaren Produkte endlicher Verbände lassen sich in $\mathrm{Cl}(X)$ einbetten.

Korollar

$|X| \geq 4 \rightarrow \mathrm{Cl}(X)$ erfüllt keine nichttrivialen Quasiidentitäten.

Komplexität des Klonverbandes (X unendlich)

Fakt

$Y \subseteq X \to \mathrm{Cl}(Y)$ ist ein Intervall von $\mathrm{Cl}(X)$.

Komplexität des Klonverbandes (X unendlich)

Fakt

$Y \subseteq X \to \mathrm{Cl}(Y)$ ist ein Intervall von $\mathrm{Cl}(X)$.

$$\sigma : \begin{array}{ccc} \mathrm{Cl}(Y) & \to & \mathrm{Cl}(X) \\ \mathcal{C} & \mapsto & \{f \in \mathcal{O}_X : f \restriction_Y \in \mathcal{C}\} \end{array}$$

Komplexität des Klonverbandes (X unendlich)

Fakt

$Y \subseteq X \to \mathrm{Cl}(Y)$ ist ein Intervall von $\mathrm{Cl}(X)$.

$$\sigma : \begin{array}{ccc} \mathrm{Cl}(Y) & \to & \mathrm{Cl}(X) \\ \mathcal{C} & \mapsto & \{f \in \mathcal{O}_X : f \restriction_Y \in \mathcal{C}\} \end{array}$$

X unendlich $\to$ Zahl der kompakten Elemente von $\mathrm{Cl}(X) = 2^{|X|} = |\mathcal{O}|$.

Komplexität des Klonverbandes (X unendlich)

Fakt

$Y \subseteq X \to \mathrm{Cl}(Y)$ ist ein Intervall von $\mathrm{Cl}(X)$.

$$\sigma : \begin{array}{ccc} \mathrm{Cl}(Y) & \to & \mathrm{Cl}(X) \\ \mathcal{C} & \mapsto & \{f \in \mathcal{O}_X : f\restriction_Y \in \mathcal{C}\} \end{array}$$

X unendlich $\to$ Zahl der kompakten Elemente von $\mathrm{Cl}(X) = 2^{|X|} = |\mathcal{O}|$.

$\mathfrak{L}$ vollständiger Unterverband von $\mathrm{Cl}(X)$ $\to$ $\mathfrak{L}$ algebraisch und hat höchstens $2^{|X|}$ kompakte Elemente.

Komplexität des Klonverbandes (X unendlich)

Fakt

$Y \subseteq X \to \mathrm{Cl}(Y)$ ist ein Intervall von $\mathrm{Cl}(X)$.

$$\sigma : \begin{array}{ccc} \mathrm{Cl}(Y) & \to & \mathrm{Cl}(X) \\ \mathcal{C} & \mapsto & \{f \in \mathcal{O}_X : f \restriction_Y \in \mathcal{C}\} \end{array}$$

X unendlich $\to$ Zahl der kompakten Elemente von $\mathrm{Cl}(X)$ = $2^{|X|} = |\mathcal{O}|$.

$\mathfrak{L}$ vollständiger Unterverband von $\mathrm{Cl}(X)$ $\to$ $\mathfrak{L}$ algebraisch und hat höchstens $2^{|X|}$ kompakte Elemente.

Satz

Alle algebraischen Verbände mit höchstens $2^{|X|}$ kompakten Elementen sind vollständige Unterverbände von $\mathrm{Cl}(X)$.

Fragen

- Dualatome (*maximale* oder *prävollständige* Klone)

Fragen

- Dualatome (*maximale* oder *prävollständige* Klone)
- Atome (*minimale* Klone)

Fragen

- Dualatome (*maximale* oder *prävollständige* Klone)
- Atome (*minimale* Klone)
- Unterverbände (z.B. symmetrische Klone, Intervalle)

Fragen

- Dualatome (*maximale* oder *prävollständige* Klone)
- Atome (*minimale* Klone)
- Unterverbände (z.B. symmetrische Klone, Intervalle)
- Intervalle (z.B. Klone oberhalb von $\mathcal{O}^{(1)}$, von $S(X)$, Klone mit Mal'cev-Term, monoidale Intervalle)

Fragen

- Dualatome (*maximale* oder *prävollständige* Klone)
- Atome (*minimale* Klone)
- Unterverbände (z.B. symmetrische Klone, Intervalle)
- Intervalle (z.B. Klone oberhalb von $\mathcal{O}^{(1)}$, von $S(X)$, Klone mit Mal'cev-Term, monoidale Intervalle)
- Klone mit bestimmten Eigenschaften (z.B. lokale Klone, Idealklone)

Methoden

- Universelle Algebra

  Beispiel: Spektrum einer Algebra, Kongruenzen (Permutabilität, Distributivität) in Quackenbushs Beweis des Satzes von Rosenberg.

Methoden

- Universelle Algebra
  Beispiel: Spektrum einer Algebra, Kongruenzen (Permutabilität, Distributivität) in Quackenbushs Beweis des Satzes von Rosenberg.
- Galois-Verbindung Pol – Inv
  Beispiel: Satz von Rosenberg.

Methoden

- Universelle Algebra

  Beispiel: Spektrum einer Algebra, Kongruenzen (Permutabilität, Distributivität) in Quackenbushs Beweis des Satzes von Rosenberg.
- Galois-Verbindung Pol – Inv

  Beispiel: Satz von Rosenberg.
- Verbandstheorie

  Beispiel: Bulatovs Einbettungssatz (Colored trees)

Methoden

- Universelle Algebra

  Beispiel: Spektrum einer Algebra, Kongruenzen (Permutabilität, Distributivität) in Quackenbushs Beweis des Satzes von Rosenberg.
- Galois-Verbindung Pol – Inv

  Beispiel: Satz von Rosenberg.
- Verbandstheorie

  Beispiel: Bulatovs Einbettungssatz (Colored trees)
- Mengenlehre

Methoden

- Universelle Algebra

  Beispiel: Spektrum einer Algebra, Kongruenzen (Permutabilität, Distributivität) in Quackenbushs Beweis des Satzes von Rosenberg.
- Galois-Verbindung Pol – Inv

  Beispiel: Satz von Rosenberg.
- Verbandstheorie

  Beispiel: Bulatovs Einbettungssatz (Colored trees)
- Mengenlehre

  - Forcing: Beispiel Duale Atomizität (Goldstern, Shelah)

Methoden

- Universelle Algebra
  Beispiel: Spektrum einer Algebra, Kongruenzen (Permutabilität, Distributivität) in Quackenbushs Beweis des Satzes von Rosenberg.
- Galois-Verbindung Pol – Inv
  Beispiel: Satz von Rosenberg.
- Verbandstheorie
  Beispiel: Bulatovs Einbettungssatz (Colored trees)
- Mengenlehre
  - Forcing: Beispiel Duale Atomizität (Goldstern, Shelah)
  - Unendliche Kombinatorik: Beispiel Ramsey-Eigenschaften der Grundmenge (G-S), Unabhängige Familien (Einbettung)

Methoden

- Universelle Algebra

  Beispiel: Spektrum einer Algebra, Kongruenzen (Permutabilität, Distributivität) in Quackenbushs Beweis des Satzes von Rosenberg.

- Galois-Verbindung Pol – Inv

  Beispiel: Satz von Rosenberg.

- Verbandstheorie

  Beispiel: Bulatovs Einbettungssatz (Colored trees)

- Mengenlehre

  - Forcing: Beispiel Duale Atomizität (Goldstern, Shelah)
  - Unendliche Kombinatorik: Beispiel Ramsey-Eigenschaften der Grundmenge (G-S), Unabhängige Familien (Einbettung)
  - Deskriptive Mengenlehre (für abzählbares X)

Die Galois-Verbindung Pol – Inv

Die Galois-Verbindung Pol – Inv

Sei $f \in \mathcal{O}^{(n)}$ und $\theta \subseteq X^I$ Relation (wobei I eine Indexmenge).

Die Galois-Verbindung Pol – Inv

Sei $f \in \mathcal{O}^{(n)}$ und $\theta \subseteq X^I$ Relation (wobei I eine Indexmenge).

f erhält $\theta \leftrightarrow f(r_1, \ldots, r_n) \in \theta$ für alle $r_1, \ldots, r_n \in \theta$.

Die Galois-Verbindung Pol – Inv

Sei $f \in \mathcal{O}^{(n)}$ und $\theta \subseteq X^I$ Relation (wobei I eine Indexmenge).

f erhält $\theta \leftrightarrow f(r_1, \ldots, r_n) \in \theta$ für alle $r_1, \ldots, r_n \in \theta$.

Sei Θ beliebige Menge von Relationen auf X.

$\mathrm{Pol}(\Theta) := \{f \in \mathcal{O} : f$ erhält alle $\theta \in \Theta\}$ Polymorphismen von Θ.

Die Galois-Verbindung Pol – Inv

Sei $f \in \mathcal{O}^{(n)}$ und $\theta \subseteq X^I$ Relation (wobei I eine Indexmenge).

f erhält $\theta \leftrightarrow f(r_1, \ldots, r_n) \in \theta$ für alle $r_1, \ldots, r_n \in \theta$.

Sei Θ beliebige Menge von Relationen auf X.

$\mathrm{Pol}(\Theta) := \{f \in \mathcal{O} : f$ erhält alle $\theta \in \Theta\}$ Polymorphismen von Θ.

$\mathcal{R} :=$ Menge aller **endlichstelligen** Relationen auf X.

Die Galois-Verbindung Pol – Inv

Sei $f \in \mathcal{O}^{(n)}$ und $\theta \subseteq X^I$ Relation (wobei I eine Indexmenge).

f erhält $\theta \leftrightarrow f(r_1, \ldots, r_n) \in \theta$ für alle $r_1, \ldots, r_n \in \theta$.

Sei Θ beliebige Menge von Relationen auf X.

$\mathrm{Pol}(\Theta) := \{f \in \mathcal{O} : f$ erhält alle $\theta \in \Theta\}$ Polymorphismen von Θ.

$\mathcal{R} :=$ Menge aller **endlichstelligen** Relationen auf X.

Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}$ beliebige Menge endlichstelliger Operationen.
$\mathrm{Inv}(\mathcal{F}) := \{\theta \in \mathcal{R} : \theta$ wird von allen $f \in \mathcal{F}$ erhalten$\}$

Die Galois-Verbindung Pol – Inv

Sei $f \in \mathcal{O}^{(n)}$ und $\theta \subseteq X^I$ Relation (wobei I eine Indexmenge).

f erhält $\theta \leftrightarrow f(r_1, \ldots, r_n) \in \theta$ für alle $r_1, \ldots, r_n \in \theta$.

Sei Θ beliebige Menge von Relationen auf X.

$\mathrm{Pol}(\Theta) := \{f \in \mathcal{O} : f$ erhält alle $\theta \in \Theta\}$ Polymorphismen von Θ.

$\mathcal{R} :=$ Menge aller **endlichstelligen** Relationen auf X.

Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}$ beliebige Menge endlichstelliger Operationen.
$\mathrm{Inv}(\mathcal{F}) := \{\theta \in \mathcal{R} : \theta$ wird von allen $f \in \mathcal{F}$ erhalten$\}$

Fakt

$(\mathrm{Pol}, \mathrm{Inv})$ stellt Galois-Verbindung zwischen $\mathcal{O}$ und $\mathcal{R}$ her.

Die Galois-Verbindung Pol – Inv (endliches X)

Die Galois-Verbindung Pol – Inv (endliches X)

Fakt

X endlich, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O} \rightarrow \langle \mathcal{F} \rangle = \mathrm{Pol}\,\mathrm{Inv}(\mathcal{F})$.

Die Galois-Verbindung Pol – Inv (endliches X)

Fakt

X endlich, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O} \to \langle\mathcal{F}\rangle = \mathrm{Pol}\,\mathrm{Inv}(\mathcal{F})$.

Fakt

$\Theta \subseteq \mathcal{R} \to$
$\mathrm{Inv}\,\mathrm{Pol}(\Theta) = \{\theta \in \mathcal{R} : \theta$ hat primitiv positive Definition in $\Theta\}$.

Die Galois-Verbindung Pol – Inv (endliches X)

Fakt

X endlich, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O} \rightarrow \langle\mathcal{F}\rangle = \operatorname{Pol}\operatorname{Inv}(\mathcal{F})$.

Fakt

$\Theta \subseteq \mathcal{R} \rightarrow$
$\operatorname{Inv}\operatorname{Pol}(\Theta) = \{\theta \in \mathcal{R} : \theta$ hat primitiv positive Definition in $\Theta\}$.

Mehr Operationen bedeutet weniger Relationen!

Die Galois-Verbindung Pol – Inv (endliches X)

Fakt

X endlich, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O} \to \ \langle \mathcal{F} \rangle = \mathrm{Pol}\,\mathrm{Inv}(\mathcal{F})$.

Fakt

$\Theta \subseteq \mathcal{R} \to$
$\mathrm{Inv}\,\mathrm{Pol}(\Theta) = \{\theta \in \mathcal{R} : \theta$ hat primitiv positive Definition in $\Theta\}$.

Mehr Operationen bedeutet weniger Relationen!

Anwendung: Rosenbergs Charakterisierung der maximalen Klone.

Die Galois-Verbindung Pol – Inv (endliches X)

Fakt

X endlich, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O} \rightarrow \langle \mathcal{F} \rangle = \mathrm{Pol}\,\mathrm{Inv}(\mathcal{F})$.

Fakt

$\Theta \subseteq \mathcal{R} \rightarrow$
$\mathrm{Inv}\,\mathrm{Pol}(\Theta) = \{\theta \in \mathcal{R} : \theta$ hat primitiv positive Definition in $\Theta\}$.

Mehr Operationen bedeutet weniger Relationen!

Anwendung: Rosenbergs Charakterisierung der maximalen Klone.

Anwendung auf der relationalen Seite: Constraint Satisfaction Problem, Modelltheorie.

Die Galois-Verbindung Pol – Inv (unendliches X)

Die Galois-Verbindung Pol – Inv (unendliches X)

Pol(Θ) noch immer Klon. Klone der Form Pol(Θ), mit $\Theta \subseteq \mathcal{R}$, heißen *lokal abgeschlossen*.

Die Galois-Verbindung Pol – Inv (unendliches X)

Pol(Θ) noch immer Klon. Klone der Form Pol(Θ), mit $\Theta \subseteq \mathcal{R}$, heißen *lokal abgeschlossen*.

$\mathcal{C}$ lokal abgeschlossen $\leftrightarrow$ $\mathcal{C}$ abgeschlossen in der Tychonoff-Topologie (wobei X diskret).

Die Galois-Verbindung Pol – Inv (unendliches X)

$\mathrm{Pol}(\Theta)$ noch immer Klon. Klone der Form $\mathrm{Pol}(\Theta)$, mit $\Theta \subseteq \mathcal{R}$, heißen *lokal abgeschlossen*.

$\mathcal{C}$ lokal abgeschlossen $\leftrightarrow$ $\mathcal{C}$ abgeschlossen in der Tychonoff-Topologie (wobei X diskret).

$\mathcal{C}$ lokal abgeschlossen $\leftrightarrow$ $\mathcal{C}$ enthält alle Operationen, die (auf endlichen Mengen) von Operationen des Klones approximiert werden können.

Die Galois-Verbindung Pol – Inv (unendliches X)

Pol(Θ) noch immer Klon. Klone der Form Pol(Θ), mit $\Theta \subseteq \mathcal{R}$, heißen *lokal abgeschlossen*.

$\mathcal{C}$ lokal abgeschlossen $\leftrightarrow$ $\mathcal{C}$ abgeschlossen in der Tychonoff-Topologie (wobei X diskret).

$\mathcal{C}$ lokal abgeschlossen $\leftrightarrow$ $\mathcal{C}$ enthält alle Operationen, die (auf endlichen Mengen) von Operationen des Klones approximiert werden können.

Lokal abgeschlossene Klone: Vollständiger algebraischer Verband.

Die Galois-Verbindung Pol – Inv (unendliches X)

Pol(Θ) noch immer Klon. Klone der Form Pol(Θ), mit $\Theta \subseteq \mathcal{R}$, heißen *lokal abgeschlossen*.

$\mathcal{C}$ lokal abgeschlossen $\leftrightarrow$ $\mathcal{C}$ abgeschlossen in der Tychonoff-Topologie (wobei X diskret).

$\mathcal{C}$ lokal abgeschlossen $\leftrightarrow$ $\mathcal{C}$ enthält alle Operationen, die (auf endlichen Mengen) von Operationen des Klones approximiert werden können.

Lokal abgeschlossene Klone: Vollständiger algebraischer Verband.

Läßt man $|X|$-stellige Operationen zu, so bekommt man alle Klone.

Prävollständige Klone (endliches X)

Prävollständige Klone (endliches X)

Definition

Klon $\mathcal{C}$ *prävollständig* (oder *maximal*) $\leftrightarrow$ $\mathcal{C}$ Dualatom von $\mathrm{Cl}(X)$.

Prävollständige Klone (endliches X)

Definition

Klon $\mathcal{C}$ *prävollständig* (oder *maximal*) $\leftrightarrow$ $\mathcal{C}$ Dualatom von $\mathrm{Cl}(X)$.

Satz von Rosenberg, 1970

X endlich. $\mathcal{C} \in \mathrm{Cl}(X)$ prävollständig $\leftrightarrow$ $\mathcal{C} = \mathrm{Pol}(\{\theta\})$, wobei θ

- Halbordnung mit 0 und 1, oder
- Nichttriviale Äquivalenzrelation, oder
- Graph einer primen Permutation, oder
- “Graph” einer abelschen p-Gruppenoperation, oder
- Zentrale Relation, oder
- h-regulär generierte Relation.

Prävollständige Klone (endliches X)

Definition

Klon $\mathcal{C}$ *prävollständig* (oder *maximal*) $\leftrightarrow$ $\mathcal{C}$ Dualatom von $\mathrm{Cl}(X)$.

Satz von Rosenberg, 1970

X endlich. $\mathcal{C} \in \mathrm{Cl}(X)$ prävollständig $\leftrightarrow$ $\mathcal{C} = \mathrm{Pol}(\{\theta\})$, wobei θ

- Halbordnung mit 0 und 1, oder
- Nichttriviale Äquivalenzrelation, oder
- Graph einer primen Permutation, oder
- "Graph" einer abelschen p-Gruppenoperation, oder
- Zentrale Relation, oder
- h-regulär generierte Relation.

Fakt

X endlich $\to$ $\mathrm{Cl}(X)$ dualatomar, endlich viele maximale Klone.

Prävollständige Klone (unendliches X)

Prävollständige Klone (unendliches X)

Satz (Rosenberg 1976)

X unendlich $\rightarrow$ es existieren $2^{2^{|X|}}$ Dualatome in $\mathrm{Cl}(X)$.

Prävollständige Klone (unendliches X)

Satz (Rosenberg 1976)

X unendlich $\rightarrow$ es existieren $2^{2^{|X|}}$ Dualatome in $\mathrm{Cl}(X)$.

Frage (Gavrilov 1959)

X unendlich $\rightarrow$ $\mathrm{Cl}(X)$ dualatomar?

Prävollständige Klone (unendliches X)

Satz (Rosenberg 1976)

X unendlich $\rightarrow$ es existieren $2^{2^{|X|}}$ Dualatome in $\mathrm{Cl}(X)$.

Frage (Gavrilov 1959)

X unendlich $\rightarrow$ $\mathrm{Cl}(X)$ dualatomar?

Antwort (Goldstern und Shelah 2005, 2006)

Nein, falls $|X|$ regulär und GCH bei $|X|$ gilt (also: $2^{|X|} = |X|^+$).

Prävollständige Klone (unendliches X)

Satz (Rosenberg 1976)

X unendlich $\rightarrow$ es existieren $2^{2^{|X|}}$ Dualatome in $\mathrm{Cl}(X)$.

Frage (Gavrilov 1959)

X unendlich $\rightarrow$ $\mathrm{Cl}(X)$ dualatomar?

Antwort (Goldstern und Shelah 2005, 2006)

Nein, falls $|X|$ regulär und GCH bei $|X|$ gilt (also: $2^{|X|} = |X|^{+}$).

Beweis Satz von Rosenberg (nach Goldstern und Shelah 2002)

I Ideal auf X $\rightarrow$ $\mathcal{C}_I := \{f \in \mathcal{O} : f$ respektiert $I\}$ Klon.
I prim $\rightarrow$ $\mathcal{C}_I$ maximal.
$I \neq J$, beide prim $\rightarrow$ $\mathcal{C}_I \neq \mathcal{C}_J$.

Prävollständige Klone (unendliches X)

Prävollständige Klone (unendliches X)

Satz (Slupecki)

X endlich $\rightarrow$ es existiert genau 1 maximaler Klon oberhalb von $\mathcal{O}^{(1)}$.

Prävollständige Klone (unendliches X)

Satz (Slupecki)

X endlich $\rightarrow$ es existiert genau 1 maximaler Klon oberhalb von $\mathcal{O}^{(1)}$.

Satz (Gavrilov 1965)

X abzählbar unendlich $\rightarrow$ es existieren genau 2 maximale Klone oberhalb von $\mathcal{O}^{(1)}$.

Prävollständige Klone (unendliches X)

Satz (Slupecki)

X endlich $\rightarrow$ es existiert genau 1 maximaler Klon oberhalb von $\mathcal{O}^{(1)}$.

Satz (Gavrilov 1965)

X abzählbar unendlich $\rightarrow$ es existieren genau 2 maximale Klone oberhalb von $\mathcal{O}^{(1)}$.

Satz von Ramsey

$G = (V, E)$ vollständiger Graph, $|V| = \aleph_0$, $f : E \rightarrow \{0, 1\}$ Färbung der Kanten $\rightarrow$ existiert $W \subseteq V$ unendlich sodaß f auf $G' := (W, W^2 \cap E)$ konstant ist.

Prävollständige Klone (unendliches X)

Satz (Slupecki)

X endlich $\rightarrow$ es existiert genau 1 maximaler Klon oberhalb von $\mathcal{O}^{(1)}$.

Satz (Gavrilov 1965)

X abzählbar unendlich $\rightarrow$ es existieren genau 2 maximale Klone oberhalb von $\mathcal{O}^{(1)}$.

Satz von Ramsey

$G = (V, E)$ vollständiger Graph, $|V| = \aleph_0$, $f : E \rightarrow \{0, 1\}$ Färbung der Kanten $\rightarrow$ existiert $W \subseteq V$ unendlich sodaß f auf $G' := (W, W^2 \cap E)$ konstant ist.

Definition

κ *schwach kompakt* $\leftrightarrow$ $\kappa > \aleph_0$, Satz von Ramsey gilt auf κ.

Prävollständige Klone (unendliches X)

Satz (Gol-Sh 2002)

$|X|$ schwach kompakt $\rightarrow$ es existieren genau 2 maximale Klone oberhalb von $\mathcal{O}^{(1)}$.

Prävollständige Klone (unendliches X)

Satz (Gol-Sh 2002)

$|X|$ schwach kompakt $\rightarrow$ es existieren genau 2 maximale Klone oberhalb von $\mathcal{O}^{(1)}$.

Satz (Gol-Sh 2002)

Meistens (insbesondere auf allen Nachfolgern $\geq \aleph_2$) existieren $2^{2^{|X|}}$ maximale Klone oberhalb von $\mathcal{O}^{(1)}$.

Prävollständige Klone (unendliches X)

Satz (Gol-Sh 2002)

$|X|$ schwach kompakt $\rightarrow$ es existieren genau 2 maximale Klone oberhalb von $\mathcal{O}^{(1)}$.

Satz (Gol-Sh 2002)

Meistens (insbesondere auf allen Nachfolgern $\geq \aleph_2$) existieren $2^{2^{|X|}}$ maximale Klone oberhalb von $\mathcal{O}^{(1)}$.

$\mathcal{S} :=$ Permutationen von X.

Prävollständige Klone (unendliches X)

Satz (Gol-Sh 2002)

$|X|$ schwach kompakt $\rightarrow$ es existieren genau 2 maximale Klone oberhalb von $\mathcal{O}^{(1)}$.

Satz (Gol-Sh 2002)

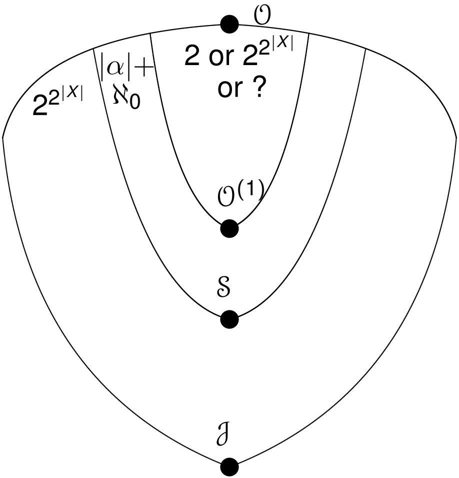
Meistens (insbesondere auf allen Nachfolgern $\geq \aleph_2$) existieren $2^{2^{|X|}}$ maximale Klone oberhalb von $\mathcal{O}^{(1)}$.

$\mathcal{S} :=$ Permutationen von X.

Satz (Heindorf 2002/2005)

$|X| = \aleph_\alpha$ regulär $\rightarrow$ es existieren $|\alpha| + \aleph_0$ maximale Klone, die $\mathcal{S}$, aber nicht $\mathcal{O}^{(1)}$ enthalten. Explizit beschrieben.

Prävollständige Klone (unendliches X)



Minimale Klone

Definition

Klon $\mathcal{C}$ *minimal* $\leftrightarrow$ $\mathcal{C}$ Atom in $\mathrm{Cl}(X)$.

Minimale Klone

Definition

Klon $\mathcal{C}$ *minimal* $\leftrightarrow$ $\mathcal{C}$ Atom in $\mathrm{Cl}(X)$.

- $\mathcal{C}$ minimal $\rightarrow$ es existiert $f \in \mathcal{O}$ mit $\mathcal{C} = \langle\{f\}\rangle$.

Minimale Klone

Definition

Klon $\mathcal{C}$ *minimal* $\leftrightarrow$ $\mathcal{C}$ Atom in $\mathrm{Cl}(X)$.

- $\mathcal{C}$ minimal $\rightarrow$ es existiert $f \in \mathcal{O}$ mit $\mathcal{C} = \langle\{f\}\rangle$.
- X endlich $\rightarrow$ $\mathrm{Cl}(X)$ atomar,
  endlich viele Atome.

Minimale Klone

Definition

Klon $\mathcal{C}$ *minimal* $\leftrightarrow$ $\mathcal{C}$ Atom in $\mathrm{Cl}(X)$.

- $\mathcal{C}$ minimal $\rightarrow$ es existiert $f \in \mathcal{O}$ mit $\mathcal{C} = \langle\{f\}\rangle$.
- X endlich $\rightarrow$ $\mathrm{Cl}(X)$ atomar,
  endlich viele Atome.
- X unendlich $\rightarrow$ $\mathrm{Cl}(X)$ nicht atomar,
  $|X|$ Atome.

Minimale Klone

Definition

Klon $\mathcal{C}$ *minimal* $\leftrightarrow$ $\mathcal{C}$ Atom in $\mathrm{Cl}(X)$.

- $\mathcal{C}$ minimal $\rightarrow$ es existiert $f \in \mathcal{O}$ mit $\mathcal{C} = \langle \{f\} \rangle$.
- X endlich $\rightarrow$ $\mathrm{Cl}(X)$ atomar,
  endlich viele Atome.
- X unendlich $\rightarrow$ $\mathrm{Cl}(X)$ nicht atomar,
  $|X|$ Atome.
- Minimale Klone auch für endliches X nicht bekannt!

Ein kompliziertes Intervall in Cl(X)

Sei X unendlich. Für $f \in \mathcal{O}$ sei $Fix(f) := \{x \in X : f(x, \ldots, x) = x\}$.

Ein kompliziertes Intervall in Cl(X)

Sei X unendlich. Für $f \in \mathcal{O}$ sei $Fix(f) := \{x \in X : f(x, \dots, x) = x\}$.

Sei F Filter auf X. Definiere $\mathcal{C}_F := \{f \in \mathcal{O} : Fix(f) \in F\}$.
"Klon der F-idempotenten Operationen".

Ein kompliziertes Intervall in Cl(X)

Sei X unendlich. Für $f \in \mathcal{O}$ sei $Fix(f) := \{x \in X : f(x, \ldots, x) = x\}$.

Sei F Filter auf X. Definiere $\mathcal{C}_F := \{f \in \mathcal{O} : Fix(f) \in F\}$.
“Klon der F-idempotenten Operationen”.

$\mathcal{I} := \mathcal{C}_{\{X\}} = \{f \in \mathcal{O} : f \text{ idempotent}\}$ Klon der idempotenten Operationen.

Ein kompliziertes Intervall in Cl(X)

Sei X unendlich. Für $f \in \mathcal{O}$ sei $Fix(f) := \{x \in X : f(x, \ldots, x) = x\}$.

Sei F Filter auf X. Definiere $\mathcal{C}_F := \{f \in \mathcal{O} : Fix(f) \in F\}$.
"Klon der F-idempotenten Operationen".

$\mathcal{I} := \mathcal{C}_{\{X\}} = \{f \in \mathcal{O} : f$ idempotent$\}$ Klon der idempotenten Operationen.

Satz (Go-Sh, 200x)

- $\mathcal{C}_F$ ist ein Klon.
- $F_1 \subsetneq F_2 \ \rightarrow \ \mathcal{C}_{F_1} \subsetneq \mathcal{C}_{F_2}$.
- $\mathcal{C}_{\mathcal{P}(X)} = \mathcal{O}$.
- Jeder Klon oberhalb von $\mathcal{I}$ ist von der Form $\mathcal{C}_F$.
- $[\mathcal{I}, \mathcal{O}]$ ist isomorph zum Verband aller Filter auf X.

Monoidale Intervalle

Sei $\mathcal{M} \leq \mathcal{O}^{(1)}$ Monoid. $I_{\mathcal{M}} := \{\mathcal{C} \in \mathrm{Cl}(X) : \mathcal{C} \cap \mathcal{O}^{(1)} = \mathcal{M}\}$.

$\{I_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \leq \mathcal{O}^{(1)}\}$ Partition von $\mathrm{Cl}(X)$.

Monoidale Intervalle

Sei $\mathcal{M} \leq \mathcal{O}^{(1)}$ Monoid. $I_{\mathcal{M}} := \{\mathcal{C} \in \mathrm{Cl}(X) : \mathcal{C} \cap \mathcal{O}^{(1)} = \mathcal{M}\}$.
$\{I_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \leq \mathcal{O}^{(1)}\}$ Partition von $\mathrm{Cl}(X)$.

Kleinstes Element in $I_{\mathcal{M}}$: $\langle \mathcal{M} \rangle$.
Größtes Element: $\mathrm{Pol}(\{\mathcal{M}\})$.
$f \in \mathrm{Pol}(\{\mathcal{M}\}) \leftrightarrow f(g_1, \ldots, g_n) \in \mathcal{M}$ für alle $g_1, \ldots, g_n \in \mathcal{M}$.
$\mathcal{M} \subseteq X^X$ Relation!

Monoidale Intervalle

Sei $\mathcal{M} \leq \mathcal{O}^{(1)}$ Monoid. $I_\mathcal{M} := \{\mathcal{C} \in \mathrm{Cl}(X) : \mathcal{C} \cap \mathcal{O}^{(1)} = \mathcal{M}\}$.
$\{I_\mathcal{M} : \mathcal{M} \leq \mathcal{O}^{(1)}\}$ Partition von $\mathrm{Cl}(X)$.

Kleinstes Element in $I_\mathcal{M}$: $\langle \mathcal{M} \rangle$.
Größtes Element: $\mathrm{Pol}(\{\mathcal{M}\})$.
$f \in \mathrm{Pol}(\{\mathcal{M}\}) \leftrightarrow f(g_1, \ldots, g_n) \in \mathcal{M}$ für alle $g_1, \ldots, g_n \in \mathcal{M}$.
$\mathcal{M} \subseteq X^X$ Relation!

$I_\mathcal{M} = [\langle \mathcal{M} \rangle, \mathrm{Pol}(\mathcal{M})]$ heißt *monoidales Intervall*.

Monoidale Intervalle

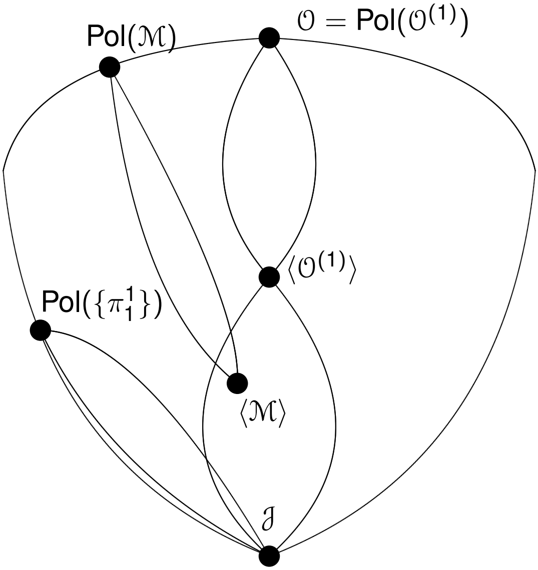
Sei $\mathcal{M} \leq \mathcal{O}^{(1)}$ Monoid. $I_{\mathcal{M}} := \{\mathcal{C} \in \mathrm{Cl}(X) : \mathcal{C} \cap \mathcal{O}^{(1)} = \mathcal{M}\}$.
$\{I_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \leq \mathcal{O}^{(1)}\}$ Partition von $\mathrm{Cl}(X)$.

Kleinstes Element in $I_{\mathcal{M}}$: $\langle \mathcal{M} \rangle$.
Größtes Element: $\mathrm{Pol}(\{\mathcal{M}\})$.
$f \in \mathrm{Pol}(\{\mathcal{M}\}) \leftrightarrow f(g_1, \ldots, g_n) \in \mathcal{M}$ für alle $g_1, \ldots, g_n \in \mathcal{M}$.
$\mathcal{M} \subseteq X^X$ Relation!

$I_{\mathcal{M}} = [\langle \mathcal{M} \rangle, \mathrm{Pol}(\mathcal{M})]$ heißt *monoidales Intervall*.

Genauso mit n-ären Operationenmengen, die die Projektionen enthalten und unter Komposition abgeschloßen sind.
"Approximationen" von $\mathrm{Cl}(X)$.

Monoidale Intervalle



Machidas Metrik

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Klone, $\mathcal{C} \neq \mathcal{D} \rightarrow$ es gibt ein $n \geq 1$ sodaß $\mathcal{C} \cap \mathcal{O}^{(n)} \neq \mathcal{D} \cap \mathcal{O}^{(n)}$.

Machidas Metrik

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Klone, $\mathcal{C} \neq \mathcal{D} \rightarrow$ es gibt ein $n \geq 1$ sodaß $\mathcal{C} \cap \mathcal{O}^{(n)} \neq \mathcal{D} \cap \mathcal{O}^{(n)}$.

Außerdem: $\mathcal{C} \cap \mathcal{O}^{(n)} \neq \mathcal{D} \cap \mathcal{O}^{(n)} \rightarrow \mathcal{C} \cap \mathcal{O}^{(n+1)} \neq \mathcal{D} \cap \mathcal{O}^{(n+1)}$

Machidas Metrik

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Klone, $\mathcal{C} \neq \mathcal{D} \to$ es gibt ein $n \geq 1$ sodaß $\mathcal{C} \cap \mathcal{O}^{(n)} \neq \mathcal{D} \cap \mathcal{O}^{(n)}$.

Außerdem: $\mathcal{C} \cap \mathcal{O}^{(n)} \neq \mathcal{D} \cap \mathcal{O}^{(n)} \to \mathcal{C} \cap \mathcal{O}^{(n+1)} \neq \mathcal{D} \cap \mathcal{O}^{(n+1)}$

$$d(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n-1}}, & \mathcal{C} \neq \mathcal{D} \wedge n = \min\{k : \mathcal{C} \cap \mathcal{O}^{(k)} \neq \mathcal{D} \cap \mathcal{O}^{(k)}\}, \\ 0, & \mathcal{C} = \mathcal{D} \end{cases}$$

Metrik auf $\mathrm{Cl}(X)$.

Machidas Metrik

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Klone, $\mathcal{C} \neq \mathcal{D} \rightarrow$ es gibt ein $n \geq 1$ sodaß $\mathcal{C} \cap \mathcal{O}^{(n)} \neq \mathcal{D} \cap \mathcal{O}^{(n)}$.

Außerdem: $\mathcal{C} \cap \mathcal{O}^{(n)} \neq \mathcal{D} \cap \mathcal{O}^{(n)} \rightarrow \mathcal{C} \cap \mathcal{O}^{(n+1)} \neq \mathcal{D} \cap \mathcal{O}^{(n+1)}$

$$d(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n-1}}, & \mathcal{C} \neq \mathcal{D} \wedge n = \min\{k : \mathcal{C} \cap \mathcal{O}^{(k)} \neq \mathcal{D} \cap \mathcal{O}^{(k)}\}, \\ 0, & \mathcal{C} = \mathcal{D} \end{cases}$$

Metrik auf $\mathrm{Cl}(X)$.

Monoidale Intervalle genau die Sphären mit Radius 1.

Monoidale Intervalle: Beispiele

$I_{\mathcal{O}^{(1)}} = [\langle \mathcal{O}^{(1)} \rangle, \mathcal{O}]$. Kette der Länge $|X| + 1$ für endliches X (Burle 1967). Sonst kompliziert.

Monoidale Intervalle: Beispiele

$I_{\mathcal{O}^{(1)}} = [\langle \mathcal{O}^{(1)} \rangle, \mathcal{O}]$. Kette der Länge $|X| + 1$ für endliches X (Burle 1967). Sonst kompliziert.

$|\mathcal{I}_{\mathcal{S}}| = 1$ (wobei $\mathcal{S} \ldots$ Permutationen von X).

Monoidale Intervalle: Beispiele

$I_{\mathcal{O}^{(1)}} = [\langle \mathcal{O}^{(1)} \rangle, \mathcal{O}]$. Kette der Länge $|X| + 1$ für endliches X (Burle 1967). Sonst kompliziert.

$|\mathcal{I}_{\mathcal{S}}| = 1$ (wobei $\mathcal{S} \dots$ Permutationen von X).

Auf endlichem X sind alle Intervalle entweder höchstens abzählbar oder haben Größe $2^{\aleph_0}$ (Rosenberg und Sauer).

Monoidale Intervalle: Beispiele

$I_{\mathcal{O}^{(1)}} = [\langle \mathcal{O}^{(1)} \rangle, \mathcal{O}]$. Kette der Länge $|X| + 1$ für endliches X (Burle 1967). Sonst kompliziert.

$|\mathcal{I}_{\mathcal{S}}| = 1$ (wobei $\mathcal{S} \ldots$ Permutationen von X).

Auf endlichem X sind alle Intervalle entweder höchstens abzählbar oder haben Größe $2^{\aleph_0}$ (Rosenberg und Sauer).

X endlich $\rightarrow |\operatorname{Cl}(X)| = 2^{\aleph_0}$, Zahl der Monoide endlich. Also existieren monoidale Intervalle der Größe $2^{\aleph_0}$.

Monoidale Intervalle: Beispiele

$I_{\mathcal{O}^{(1)}} = [\langle \mathcal{O}^{(1)} \rangle, \mathcal{O}]$. Kette der Länge $|X| + 1$ für endliches X (Burle 1967). Sonst kompliziert.

$|\mathcal{I}_{\mathcal{S}}| = 1$ (wobei $\mathcal{S} \ldots$ Permutationen von X).

Auf endlichem X sind alle Intervalle entweder höchstens abzählbar oder haben Größe $2^{\aleph_0}$ (Rosenberg und Sauer).

X endlich $\rightarrow |\operatorname{Cl}(X)| = 2^{\aleph_0}$, Zahl der Monoide endlich. Also existieren monoidale Intervalle der Größe $2^{\aleph_0}$.

Es existieren abzählbar unendliche monoidale Intervalle auf endlichem X (Krochin 1997).

Monoidale Intervalle (unendliches X)

Satz

X unendlich, $\mathfrak{L}$ bialgebraischer distributiver Verband mit höchstens $2^{|X|}$ kompakten Elementen $\rightarrow$
es exisitert $\mathcal{M} \leq \mathcal{O}^{(1)}$ mit $I_{\mathcal{M}} \cong 1 + \mathfrak{L}$.

Monoidale Intervalle (unendliches X)

Satz

X unendlich, $\mathfrak{L}$ bialgebraischer distributiver Verband mit höchstens $2^{|X|}$ kompakten Elementen $\to$
es exisitert $\mathcal{M} \leq \mathcal{O}^{(1)}$ mit $I_{\mathcal{M}} \cong 1 + \mathfrak{L}$.

Korollar

X unendlich $\to$ es gibt mindestens monoidale Intervalle der Größen

- λ für alle $\lambda \leq 2^{|X|}$
- 2^{λ} für alle $\lambda \leq 2^{|X|}$.

Offene Probleme

Offene Probleme

- Minimale Klone bestimmen.

Offene Probleme

- Minimale Klone bestimmen.
- Welche Unterverbände hat $\mathrm{Cl}(X)$ (X endlich)? Welche Intervalle?

Offene Probleme

- Minimale Klone bestimmen.
- Welche Unterverbände hat $\mathrm{Cl}(X)$ (X endlich)? Welche Intervalle?
- Läßt sich $\mathrm{Cl}(X)$ in $\mathrm{Cl}(Y)$ einbetten, $Y \subsetneq X$, beide endlich?

Offene Probleme

- Minimale Klone bestimmen.
- Welche Unterverbände hat $\mathrm{Cl}(X)$ (X endlich)? Welche Intervalle?
- Läßt sich $\mathrm{Cl}(X)$ in $\mathrm{Cl}(Y)$ einbetten, $Y \subsetneq X$, beide endlich?
- Hat $\mathrm{Cl}(X)$ nicht-innere Automorphismen?

Offene Probleme

- Minimale Klone bestimmen.
- Welche Unterverbände hat $\mathrm{Cl}(X)$ (X endlich)? Welche Intervalle?
- Läßt sich $\mathrm{Cl}(X)$ in $\mathrm{Cl}(Y)$ einbetten, $Y \subsetneq X$, beide endlich?
- Hat $\mathrm{Cl}(X)$ nicht-innere Automorphismen?
- Ist $\mathrm{Cl}(X)$ dualatomar (ohne GCH bzw. für singuläres $|X|$)?

Offene Probleme

- Minimale Klone bestimmen.
- Welche Unterverbände hat $\mathrm{Cl}(X)$ (X endlich)? Welche Intervalle?
- Läßt sich $\mathrm{Cl}(X)$ in $\mathrm{Cl}(Y)$ einbetten, $Y \subsetneq X$, beide endlich?
- Hat $\mathrm{Cl}(X)$ nicht-innere Automorphismen?
- Ist $\mathrm{Cl}(X)$ dualatomar (ohne GCH bzw. für singuläres $|X|$)?
- Welche Intervalle hat $\mathrm{Cl}(X)$ (X unendlich)?

Offene Probleme

- Minimale Klone bestimmen.
- Welche Unterverbände hat $\mathrm{Cl}(X)$ (X endlich)? Welche Intervalle?
- Läßt sich $\mathrm{Cl}(X)$ in $\mathrm{Cl}(Y)$ einbetten, $Y \subsetneq X$, beide endlich?
- Hat $\mathrm{Cl}(X)$ nicht-innere Automorphismen?
- Ist $\mathrm{Cl}(X)$ dualatomar (ohne GCH bzw. für singuläres $|X|$)?
- Welche Intervalle hat $\mathrm{Cl}(X)$ (X unendlich)?
- Welche monoidalen Intervalle hat $\mathrm{Cl}(X)$ (X unendlich)?

Offene Probleme

- Minimale Klone bestimmen.
- Welche Unterverbände hat $\mathrm{Cl}(X)$ (X endlich)? Welche Intervalle?
- Läßt sich $\mathrm{Cl}(X)$ in $\mathrm{Cl}(Y)$ einbetten, $Y \subsetneq X$, beide endlich?
- Hat $\mathrm{Cl}(X)$ nicht-innere Automorphismen?
- Ist $\mathrm{Cl}(X)$ dualatomar (ohne GCH bzw. für singuläres $|X|$)?
- Welche Intervalle hat $\mathrm{Cl}(X)$ (X unendlich)?
- Welche monoidalen Intervalle hat $\mathrm{Cl}(X)$ (X unendlich)?
- Welche Unterverbände hat der lokale Klonverband?

Literatur

- R. Pöschel und L. Kalužnin, *Funktionen- und Relationenalgebren*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1979.

Literatur

- R. Pöschel und L. Kalužnin, *Funktionen- und Relationenalgebren*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1979.
- Á. Szendrei, *Clones in universal algebra*, Les Presses de L'Université de Montréal, 1986.

Literatur

- R. Pöschel und L. Kalužnin, *Funktionen- und Relationenalgebren*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1979.
- Á. Szendrei, *Clones in universal algebra*, Les Presses de L'Université de Montréal, 1986.
- D. Lau, *Function algebras on finite sets: A Basic Course on Many-valued Logic and Clone Theory*, Springer, 2006.

Literatur

- R. Pöschel und L. Kalužnin, *Funktionen- und Relationenalgebren*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1979.
- Á. Szendrei, *Clones in universal algebra*, Les Presses de L'Université de Montréal, 1986.
- D. Lau, *Function algebras on finite sets: A Basic Course on Many-valued Logic and Clone Theory*, Springer, 2006.
- A. Bulatov, A. Krokhin, and P. G. Jeavons, *Classifying the complexity of constraints using finite algebras*, SIAM Journal on Computing **34** (2005), 720–742.

Literatur

- R. Pöschel und L. Kalužnin, *Funktionen- und Relationenalgebren*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1979.
- Á. Szendrei, *Clones in universal algebra*, Les Presses de L'Université de Montréal, 1986.
- D. Lau, *Function algebras on finite sets: A Basic Course on Many-valued Logic and Clone Theory*, Springer, 2006.
- A. Bulatov, A. Krokhin, and P. G. Jeavons, *Classifying the complexity of constraints using finite algebras*, SIAM Journal on Computing **34** (2005), 720–742.
- M. Goldstern und M. Pinsker, *A survey of clones on infinite sets*, Preprint, 2006.