

Kompakte Lie Gruppen und Darstellungstheorie

SS 2017

Franz Schuster

franz.schuster@tuwien.ac.at

Einleitung

Diese Vorlesung soll als eine Einführung in die Theorie kompakter Lie Gruppen und ihrer Darstellungen dienen. Dieser Themenkreis zeichnet sich durch seine zahlreichen Verbindungen zu verschiedenen Bereichen der Mathematik aus, wie etwa der Differentialgeometrie, der harmonischen Analysis und auch der mathematischen Physik. Die Theorie beginnt oft mit der Klassifikation aller Möglichkeiten wie eine Gruppe auf einem Vektorraum agieren kann und behandelt in weiterer Folge Fragen der Zerlegung, Unitarität sowie der geometrischen Realisierung. Im Allgemeinen ist jede dieser Problemstellungen schwer zu beantworten. Im Falle *kompakter* Lie Gruppen sind die Antworten allerdings mehr oder weniger vollständig verstanden, sodass die Theorie solcher Gruppen auch als Grundlage für das Studium nicht-kompakter Gruppen genutzt wird.

Wie die grundlegende Definition bereits nahelegt, ist die Theorie von Lie Gruppen an der Grenze zwischen Algebra und Differentialgeometrie angesiedelt und Werkzeuge aus beiden Bereichen werden häufig eingesetzt. Ein fundamentaler Umstand in der Theorie von Lie Gruppen ist, dass fast die gesamte (eher komplizierte) Struktur einer Lie Gruppe bereits in ihrer assoziierten Lie Algebra codiert ist. Dabei handelt es sich um ein viel einfacheres Objekt, nämlich einen endlich dimensionalen Vektorraum, der auf natürliche Weise mit einer bilinearen Operation ausgestattet ist. Lie Algebren können daher mit Hilfe von rein algebraischen Hilfsmitteln studiert werden. Im ersten Teil der Vorlesung werden wir uns auch hauptsächlich mit dem Zusammenspiel einer (nicht-notwendig kompakten) Lie Gruppe und ihrer assoziierten Lie Algebra beschäftigen, während wir im zweiten Teil auf die Darstellungstheorie von kompakten Lie Gruppen eingehen.

Das Studium von Lie Gruppen erfordert ein solides Vorwissen aus Analysis und Geometrie, insbesondere benötigen wir eine Reihe grundlegender Begriffsbildungen und Resultate aus der Differentialgeometrie, die etwa in meiner Vorlesung „Analysis auf Mannigfaltigkeiten“ (ein Skriptum dazu finden Sie unter dem Link <http://dmg.tuwien.ac.at/schuster/SkriptAnaMannig.pdf>) abgedeckt werden. Wir werden auch die in dieser Vorlesung eingeführte Notation im Folgenden verwenden und auf eine Reihe von Resultaten durch [ANMA,***] verweisen!

Die Literatur zur Theorie (kompakter) Lie Gruppen ist äußerst umfangreich. Es gibt eine Reihe sehr guter Bücher zu diesem Themenkreis (siehe etwa die Liste auf der nächsten Seite), welche aber häufig deutlich über den Stoffumfang dieser kurzen Vorlesung hinausgehen. Besonders empfehlenswerte Bücher (da sich die Vorlesung stark an sie anlehnt), sind „Introduction to smooth manifolds“ von J.M. Lee, „Representations of compact Lie groups“ von T. Bröcker und T. tom Dieck sowie „Compact Lie groups“ von M.R. Sepanski.

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlegende Definitionen und Beispiele	3
2	Lie Algebren, Distributionen und Blätterungen	22
3	Die Exponentialabbildung	45
4	Darstellungen kompakter Lie Gruppen	65

Literatur

- [1] T. Bröcker und T. tom Dieck, *Representations of compact Lie groups*, Graduate Texts in Mathematics **98**, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [2] R. Goodman, and N.R. Wallach, *Symmetry, representations, and invariants*, Graduate Texts in Mathematics **255**, Springer, Dordrecht, 2009.
- [3] A.W. Knap, *Lie groups beyond an introduction, Second edition*, Progress in Mathematics **140**, Birkhuser Boston, Inc., Boston, MA, 2002.
- [4] J.M. Lee, *Introduction to smooth manifolds, Second edition*, Graduate Texts in Mathematics **218**, Springer, New York, 2013.
- [5] M.R. Sepanski, *Compact Lie groups*, Graduate Texts in Mathematics **235**, Springer, New York, 2007.
- [6] D.P. Želobenko, *Compact Lie groups and their representations*, Translations of Mathematical Monographs **40**, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1973.

1 Grundlegende Definitionen und Beispiele

In diesem ersten Kapitel werden wir einige der grundlegenden Begriffe aus der Theorie von Lie Gruppen einführen, sowie eine Reihe von wichtigen Beispielen betrachten, auf die wir in weiterer Folge immer wieder Bezug nehmen werden. Das Konzept einer Lie Gruppe entsteht auf natürliche Weise durch die Verbindung des algebraischen Gruppenbegriffs mit der geometrischen Begriffsbildung einer glatten Mannigfaltigkeit.

Definition. Eine *Lie Gruppe* ist eine glatte Mannigfaltigkeit G versehen mit einer Gruppenstruktur, sodass die Gruppenmultiplikation glatt ist.

Ein *Homomorphismus* zwischen zwei Lie Gruppen G und H ist eine glatte Abbildung $F : G \rightarrow H$, die außerdem ein Gruppenhomomorphismus ist. Wir nennen F einen *Isomorphismus*, wenn F auch ein Diffeomorphismus ist. In diesem Fall nennen wir G und H *isomorph*.

Ist G eine Lie Gruppe, so schreiben wir im Folgenden $m : G \times G \rightarrow G$, $m(g, h) = gh$, für die glatte Multiplikation auf G und $\nu : G \rightarrow G$, $\nu(g) = g^{-1}$, für die Inversion auf G . Mit $e \in G$ bezeichnen wir wie üblich das neutrale Element.

In einer Lie Gruppe G bestimmt jedes Element $g \in G$ Abbildungen $L_g, R_g : G \rightarrow G$, genannt *Links-* und *Rechtstranlation*, die gegeben sind durch

$$L_g(h) = gh \quad \text{und} \quad R_g(h) = hg.$$

Als Zusammensetzung der glatten Abbildungen

$$G \xrightarrow{\iota_g} G \times G \xrightarrow{m} G$$

wobei $\iota_g(h) = (g, h)$, ist L_g glatt. Genauer ist L_g ein Diffeomorphismus mit der glatten Inversen $L_{g^{-1}}$. Analog ist R_g ein Diffeomorphismus für jedes $g \in G$. Des weiteren gelten offenbar die folgenden Regeln für die Hintereinanderausführung von Links- bzw. Rechtstranlationen

$$L_g \circ L_h = L_{gh} \quad \text{und} \quad R_g \circ R_h = R_{hg}.$$

Bemerkungen.

- (a) Viele grundlegende Identitäten der Gruppentheorie lassen sich mit Hilfe der Translationsabbildungen ausdrücken. So kann etwa die bekannte Gleichung $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$ auch in der Form $\nu \circ L_g = R_{g^{-1}} \circ \nu$ oder $\nu \circ R_h = L_{h^{-1}} \circ \nu$ geschrieben werden. Die Definition des neutralen Elements ist äquivalent dazu, dass $L_e = R_e = \text{id}_G$.
- (b) Eine sehr wichtige Eigenschaft der Linkstranlation (und analog auch der Rechtstranlation) ist, dass es zu je zwei Gruppenelementen $g, h \in G$ eine eindeutig bestimmte Linkstranlation gibt, die g auf h abbildet, nämlich $L_{hg^{-1}}$. Die Existenz eines globalen Diffeomorphismus, der einen beliebigen Punkt auf einen beliebigen anderen Punkt abbilden kann, ist eine besondere Eigenschaft von Lie Gruppen, die wir noch oft ausnutzen werden.

In der Definition von Lie Gruppen wird in der Literatur oft auch gefordert, dass die Gruppeninversion glatt ist. Wir wollen mit der folgenden Proposition zeigen, dass diese Forderung allerdings redundant ist. Dazu benötigen wir zunächst das Differential der Gruppenmultiplikation, welches sich aber über die Translationsabbildungen auf einfache Weise ausdrücken lässt.

Proposition 1.1 *Es sei G eine Lie Gruppe und $g, h \in G$.*

(a) *Für $v \in T_g G$ und $w \in T_h G$ gilt*

$$dm_{(g,h)}(v, w) = d(R_h)_g(v) + d(L_g)_h(w).$$

Ist $g = h = e$, so haben wir speziell $dm_{(e,e)}(v, w) = v + w$.

(b) *Die Gruppeninversion $\nu : G \rightarrow G$ ist glatt und für $v \in T_g G$ gilt*

$$d\nu_g(v) = -(d(R_{g^{-1}})_e \circ d(L_{g^{-1}})_g)(v) = -(d(L_{g^{-1}})_e \circ d(R_{g^{-1}})_g)(v).$$

Ist $g = e$, so haben wir speziell $d\nu_e(v) = -v$.

Beweis: Zum Beweis von (a), erinnern wir zunächst daran, dass der Tangentialraum $T_{(g,h)}(G \times G)$ mit $T_g G \oplus T_h G$ identifiziert werden kann. Aus der Linearität von $dm_{(g,h)}$ folgt daher $dm_{(g,h)}(v, w) = dm_{(g,h)}(v, 0) + dm_{(g,h)}(0, w)$. Es sei nun $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G$ eine glatte Kurve mit $\gamma(0) = g$ und $\gamma'(0) = v$. Die Kurve $\eta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G \times G$, $\eta(t) = (\gamma(t), h)$ hat dann offenbar den Tangentialvektor $\eta'(0) = (v, 0)$. Weiters gilt $m \circ \eta = R_h \circ \gamma$. Aus [ANMA, Proposition 3.12] folgt daher

$$dm_{(g,h)}(v, 0) = (m \circ \eta)'(0) = (R_h \circ \gamma)'(0) = d(R_h)_g(\gamma'(0)) = d(R_h)_g(v).$$

Analog zeigt man $dm_{(g,h)}(0, w) = d(L_g)_h(w)$.

Zum Beweis von (b) betrachten wir die Funktion $F : G \times G \rightarrow G \times G$, definiert durch $F(g, h) = (g, gh)$. Offensichtlich ist F glatt und bijektiv. Weiters gilt für $v \in T_g G$ und $w \in T_h G$ nach (a),

$$dF_{(e,e)}(v, w) = (v, v + w),$$

womit $dF_{(e,e)}$ ein Isomorphismus ist. Damit gibt es eine Umgebung von (e, e) auf der F^{-1} glatt ist. Da aber $F^{-1}(g, e) = (g, \nu(g))$ ist ν auf dieser Umgebung glatt. Benutzen wir nun noch $\nu \circ L_{h^{-1}} = R_h \circ \nu$, so folgt, dass ν in einer Umgebung von jedem Punkt aus G und damit auf ganz G glatt ist.

Zur Berechnung des Differentials von ν betrachten wir die konstante Funktion $n : G \rightarrow G$, $n = m \circ p \circ s$, wobei $s : G \rightarrow G \times G$ gegeben ist durch $s(g) = (g, g)$ und $p : G \times G \rightarrow G \times G$ gegeben ist durch $p(g, h) = (g, \nu(h))$. Für $v \in T_g G$ folgt

$$\begin{aligned} 0 &= dn_g(v) = dm_{(g,g^{-1})}(dp_{(g,g)}(ds_g(v))) = dm_{(g,g^{-1})}(dp_{(g,g)}((v, v))) \\ &= dm_{(g,g^{-1})}(v, d\nu_g(v)). \end{aligned}$$

Aus (a) erhalten wir daher $0 = d(R_{g^{-1}})_g(v) + d(L_g)_{g^{-1}}(d\nu_g(v))$. Da aber $d(L_{g^{-1}})_g$ die Inverse von $d(L_g)_{g^{-1}}$ ist, folgt die erste der behaupteten Gleichungen. Die zweite Formel erhält man analog durch Differentiation der Abbildung $g \mapsto m(\nu(g), g)$. ■

Wir kommen nun zu einer Reihe von wichtigen Beispielen von Lie Gruppen, auf die wir immer wieder im Laufe der Vorlesung Bezug nehmen werden.

Beispiele.

- (a) Jeder endlich-dimensionale reelle oder komplexe Vektorraum mit seiner additiven Struktur ist eine Lie Gruppe. Insbesondere sind \mathbb{R}^n und \mathbb{C}^n für jedes $n \in \mathbb{N}$ Abelsche Lie Gruppen.
- (b) Die Mengen \mathbb{R}^* und \mathbb{C}^* aller von Null verschiedenen reellen bzw. komplexen Zahlen versehen mit der Multiplikation sind Lie Gruppen.
- (c) Der Kreis $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}^*$ versehen mit der komplexen Multiplikation ist eine Abelsche Lie Gruppe.
- (d) Das *direkte Produkt* von Lie Gruppen G_1, \dots, G_k ist die Produktmannigfaltigkeit $G_1 \times \dots \times G_k$ versehen mit der komponentenweisen Multiplikation

$$(g_1, \dots, g_k)(h_1, \dots, h_k) = (g_1 h_1, \dots, g_k h_k).$$

Offenbar ist $G_1 \times \dots \times G_k$ wieder eine Lie Gruppe. Insbesondere ist der n -Torus $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$ eine Abelsche Lie Gruppe.

Wir werden später sehen, dass es zu jeder zusammenhängenden Abelschen Lie Gruppe G natürliche Zahlen $n, k \in \mathbb{N}$ gibt, sodass G isomorph ist zu $\mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^n$.

- (e) Ist G eine endliche oder abzählbar unendliche Gruppe versehen mit der diskreten Topologie, dann ist G eine *diskrete* Lie Gruppe.

Die für uns wichtigsten diskreten Lie Gruppen sind die *symmetrische Gruppe* $S(n)$ aller Permutationen der Menge $\{1, \dots, n\}$, die *alternierende Gruppe* $A(n)$ aller geraden Permutationen von $\{1, \dots, n\}$, sowie die *zyklische Gruppe* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

- (f) Ist G eine Lie Gruppe und $H \subseteq G$ eine offene Untergruppe, dann ist H eine Lie Gruppe mit der vererbten Gruppenstruktur und Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit.

Die Menge \mathbb{R}^+ aller positiven reellen Zahlen ist eine offene Untergruppe von \mathbb{R}^* und daher selbst eine Lie Gruppe.

- (g) Es sei V ein endlich-dimensionaler reeller oder komplexer Vektorraum. Die Menge $GL(V)$ aller invertierbaren linearen Abbildungen von V nach V ist eine Teilmenge des (endlich-dimensionalen) Vektorraums $L(V, V)$ aller linearen Abbildungen von V nach V . Da

$$GL(V) = \{A \in L(V, V) : \det A \neq 0\}$$

und die Determinante stetig ist, ist $GL(V)$ offen. Die Gruppenoperation auf $GL(V)$ ist die Abbildungskomposition, die durch Wahl einer Basis zu Matrixmultiplikation wird und daher glatt ist. Damit ist $GL(V)$ eine Lie Gruppe und wir erhalten insbesondere die Gruppen

$$GL(n, \mathbb{R}) = GL_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad GL(n, \mathbb{C}) = GL_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n).$$

Die Gruppe $GL(n, \mathbb{R})$ hat zwei Zusammenhangskomponenten auf denen das Vorzeichen der Determinante konstant ist. Die Menge der Abbildungen mit positiver Determinante $GL^+(n, \mathbb{R})$ bildet eine offene Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$ und ist daher selbst eine Lie Gruppe.

Wir werden etwas später sehen, dass nicht nur offene Untergruppen von Lie Gruppen selbst wieder Lie Gruppen sind, sondern auch abgeschlossene Untergruppen und Faktorgruppen einer Lie Gruppe bezüglich eines abgeschlossenen Normalteilers wieder Lie Gruppen sind. Verwenden wir diese Resultate bereits jetzt, so können wir mit Hilfe der Matrix Gruppen aus Beispiel (g) eine Vielzahl weiterer Beispiele von Lie Gruppen angeben.

Beispiele.

- (h) Die *speziellen linearen Gruppen* über \mathbb{R} und \mathbb{C} , gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) &= \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) : \det A = 1\} \quad \text{und} \\ \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) &= \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) : \det A = 1\}, \end{aligned}$$

sind abgeschlossene Untergruppen von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ bzw. $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

- (i) Durch Einbettung der Lie Gruppen \mathbb{R}^* und \mathbb{C}^* in $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ bzw. $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ als skalare Vielfache der Einheitsmatrix und anschließende Faktorbildung erhalten wir die *projektiven Gruppen*

$$\mathrm{PGL}(n, \mathbb{R}) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})/\mathbb{R}^* \quad \text{und} \quad \mathrm{PGL}(n, \mathbb{C}) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})/\mathbb{C}^*.$$

- (j) Die *orthogonale Gruppe* ist die abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ gegeben durch

$$\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) : A^T A = I\},$$

wobei I die Einheitsmatrix bezeichnet. Da die Spaltenvektoren einer orthogonalen Matrix Einheitsvektoren sind, können wir $\mathrm{O}(n)$ mit einer abgeschlossenen Teilmenge von $\mathbb{S}^{n-1} \times \dots \times \mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$ identifizieren. Insbesondere ist $\mathrm{O}(n)$ eine *kompakte* Lie Gruppe. Wir erinnern auch daran, dass $\mathrm{O}(n)$ genau aus den linearen Abbildungen aus $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ besteht, die das gewöhnliche Euklidische innere Produkt auf \mathbb{R}^n erhalten.

Wie $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ besteht auch $\mathrm{O}(n)$ aus zwei Zusammenhangskomponenten bestimmt durch die Werte ± 1 der Determinante. Die Komponente, welche die Identität enthält, ist eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{O}(n)$ und damit selbst wieder eine Lie Gruppe, genannt die *spezielle orthogonale Gruppe*:

$$\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{O}(n) : \det A = 1\}.$$

Da das Verhalten (etwa in Bezug auf Darstellungen) der Gruppe $\mathrm{SO}(n)$ stark von der Parität von n abhängt, betrachtet man die speziellen orthogonalen Gruppen meist als zwei separate Familien: $\mathrm{SO}(2n+1)$ und $\mathrm{SO}(2n)$.

- (k) Die *unitäre Gruppe* ist die abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ gegeben durch

$$\mathrm{U}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) : A^* A = I\},$$

wobei $A^* = \overline{A}^T$ die konjugiert Transponierte von A bezeichnet. Da auch die Spaltenvektoren einer unitären Matrix Einheitsvektoren sind, ist die Lie Gruppe $\mathrm{U}(n)$ *kompakt*. Sie besteht genau aus den linearen Abbildungen aus $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, die das gewöhnliche Hermitesche innere Produkt auf \mathbb{C}^n erhalten.

Die *spezielle unitäre Gruppe* ist die abgeschlossene Untergruppe von $U(n)$ gegeben durch

$$SU(n) = \{A \in U(n) : \det A = 1\}.$$

Eine besondere Rolle kommt der Lie Gruppe $SU(2)$ zu, die (wie eine einfache Rechnung zeigt) gegeben ist durch

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \text{ und } |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

und daher homöomorph zu \mathbb{S}^3 ist.

Die speziellen orthogonalen Gruppen $SO(2n + 1)$ und $SO(2n)$ sowie die spezielle unitäre Gruppe $SU(n)$ gehören zu den sogenannten *klassischen kompakten Lie Gruppen*. Diese werden komplettiert durch die *symplektische Gruppe* $Sp(n)$. Um diese zu definieren, benötigen wir den Schiefkörper der Quaternionen \mathbb{H} .

Die \mathbb{R} -Algebra \mathbb{H} besteht aus allen komplexen 2×2 Matrizen der Form

$$h = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{C},$$

versehen mit Matrixaddition und -multiplikation. Es ist leicht zu zeigen, dass jede solche von Null verschiedene Matrix eine Inverse besitzt, die wieder von dieser Form ist. Beachte, dass die quaternionische Multiplikation zwar assoziativ *nicht* aber kommutativ ist. Durch die kanonische Einbettung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}$, $z \mapsto \text{diag}(z, \bar{z})$, können wir die komplexen Zahlen \mathbb{C} und damit die reellen Zahlen \mathbb{R} als Teilmenge von \mathbb{H} auffassen. Offenbar ist \mathbb{H} ein komplexer Vektorraum und besitzt als solches eine Standardbasis bestehend aus den Elementen

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das führt auf den Standardisomorphismus komplexer Vektorräume

$$\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{H}, \quad (a, b) \mapsto a + bj = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

Die Konjugation auf \mathbb{H} ist gegeben durch

$$\iota : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \quad h = a + jb \mapsto \iota(h) = \bar{h} := \bar{a} - bj = h^*.$$

Damit können wir eine Norm auf \mathbb{H} definieren durch

$$N(h)^2 = h \cdot \bar{h} = \bar{h} \cdot h.$$

Als 4-dimensionaler reeller Vektorraum hat \mathbb{H} die Standardbasis

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

welche den Standardisomorphismus

$$\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{H}, \quad (a, b, c, d) \mapsto a + ib + cj + dk,$$

induziert.

Die *quaternionische Gruppe* ist gegeben durch

$$\mathrm{Sp}(1) = \{h \in \mathbb{H} : N(h) = 1\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \text{ und } |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

und kann daher mit $\mathrm{SU}(2)$ identifiziert werden.

Es ist leicht zu sehen, dass jede Abbildung $A : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$, die linear in Bezug auf quaternionische Skalarmultiplikation von links ist, durch eine $n \times n$ Matrix mit Koeffizienten aus \mathbb{H} dargestellt werden kann. Damit können wir wieder die Gruppe der invertierbaren \mathbb{H} -linearen Abbildungen von \mathbb{H}^n nach \mathbb{H}^n mit der Gruppe der invertierbaren $n \times n$ Matrizen mit Koeffizienten in \mathbb{H}^n identifizieren:

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{H}) = \mathrm{GL}_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n).$$

Verwenden wir den Standardisomorphismus komplexer Vektorräume $\mathbb{C}^{2n} \rightarrow \mathbb{H}^n$, so lässt sich zeigen, dass eine \mathbb{C} -lineare Abbildung A von \mathbb{C}^{2n} nach \mathbb{C}^{2n} genau dann eine \mathbb{H} -lineare Abbildung von \mathbb{H}^n nach \mathbb{H}^n induziert, wenn A durch eine Matrix der folgenden Form dargestellt werden kann:

$$A = \begin{pmatrix} C & D \\ -\bar{D} & \bar{C} \end{pmatrix}, \quad C, D \in \mathrm{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n).$$

Die Konjugation auf \mathbb{H} induziert schließlich noch ein inneres Produkt auf \mathbb{H}^n auf folgende Weise: Für $h = (h_1, \dots, h_n)$ und $l = (l_1, \dots, l_n)$ aus \mathbb{H}^n ist

$$\langle h, l \rangle = \sum_{m=1}^n h_m \bar{l}_m.$$

Die von diesem inneren Produkt induzierte Norm ist gegeben durch

$$N(h)^2 = \langle h, h \rangle = \sum_{m=1}^n N(h_m)^2.$$

Nach diesen Vorbereitungen sind wir nun in der Lage, die letzte Familie der klassischen kompakten Gruppen zu definieren:

Beispiel.

- (1) Die *symplektische Gruppe* ist gegeben durch

$$\mathrm{Sp}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{H}) : N(A(h)) = N(h) \text{ für alle } h \in \mathbb{H}^n\}.$$

Identifizieren wir wieder \mathbb{H}^n mit \mathbb{C}^{2n} , so können wir $\mathrm{Sp}(n)$ mit der Untergruppe von $\mathrm{SU}(2n)$ identifizieren, die aus den Matrizen der folgenden Form besteht:

$$\begin{pmatrix} C & D \\ -\bar{D} & \bar{C} \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2n), \quad C, D \in \mathrm{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n).$$

Wir wenden uns nun Lie Gruppen Homomorphismen zu. Das nächste Resultat ist dabei für das Verständnis vieler ihrer Eigenschaften besonders wichtig.

Satz 1.2 *Jeder Lie Gruppen Homomorphismus hat konstanten Rang.*

Beweis: Es sei $F : G \rightarrow H$ ein Lie Gruppen Homomorphismus und es bezeichne e und \hat{e} die neutralen Elemente in G bzw. H . Weiters sei g_0 ein beliebiges Element von G . Wir wollen zeigen, dass dF_{g_0} denselben Rang hat wie dF_e .

Da F ein Homomorphismus ist, gilt für $g \in G$ zunächst

$$F(L_{g_0}(g)) = F(g_0g) = F(g_0)F(g) = L_{F(g_0)}(F(g))$$

und daher

$$F \circ L_{g_0} = L_{F(g_0)} \circ F.$$

Bilden wir das Differential auf beiden Seiten dieser Identität, so erhalten wir daher

$$dF_{g_0} \circ d(L_{g_0})_e = d(L_{F(g_0)})_{\hat{e}} \circ dF_e.$$

Da $d(L_{g_0})_e$ und $d(L_{F(g_0)})_{\hat{e}}$ beide Isomorphismen sind und die Komposition einer linearen Abbildung mit einem Isomorphismus ihren Rang nicht verändert, folgt die gewünschte Aussage. ■

Als direkte Konsequenz von Theorem 1.2 und [ANMA, Satz 4.10] erhalten wir

Korollar 1.3 *Ein Lie Gruppen Homomorphismus ist genau dann ein Lie Gruppen Isomorphismus, wenn er bijektiv ist.*

Beispiele.

- (a) Die Inklusionsabbildung $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{C}^*$ ist ein Lie Gruppen Homomorphismus.
- (b) Die Abbildung $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$, $t \mapsto e^t$, ist ein Lie Gruppen Homomorphismus. Das Bild von \exp ist die offene Untergruppe \mathbb{R}^+ von \mathbb{R}^* und $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ist ein Lie Gruppen Isomorphismus mit der Inversen $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$. Analog ist auch die Abbildung $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$, $z \mapsto e^z$, ein Lie Gruppen Homomorphismus, deren Kern aus den Zahlen $2\pi ik$, $k \in \mathbb{Z}$, besteht.
- (c) Die Abbildung $\varepsilon^n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ definiert durch

$$\varepsilon^n(t_1, \dots, t_n) = (e^{2\pi i t_1}, \dots, e^{2\pi i t_n})$$

ist ein Lie Gruppen Homomorphismus mit Kern \mathbb{Z}^n .

- (d) Die Determinante $\det : \text{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$ ist ein Lie Gruppen Homomorphismus, da $\det(AB) = (\det A)(\det B)$. Analog ist $\det : \text{GL}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^*$ ein Lie Gruppen Homomorphismus.
- (e) Ist G eine Lie Gruppe und $g \in G$, so ist die Konjugation bezüglich g , also die Abbildung $C_g : G \rightarrow G$, definiert durch $C_g(h) = ghg^{-1}$, ein Lie Gruppen Isomorphismus. Wir erinnern auch daran, dass eine Untergruppe H von G ein Normalteiler von G ist, wenn $C_g(H) = H$ für alle $g \in G$.

Als nächstes wollen wir uns mit Lie Untergruppen befassen.

Definition. Es sei G eine Lie Gruppe. Eine *Lie Untergruppe* von G ist eine Untergruppe H von G versehen mit einer Topologie und glatten Struktur, die H zu einer Lie Gruppe und einer immersierten Untermannigfaltigkeit von G machen.

Wie die folgende Proposition zeigt, sind eingebettete Untergruppen automatisch Lie Untergruppen und, dass für die einfachsten eingebetteten Untergruppen, nämlich die offenen, nicht viele Möglichkeiten bestehen.

Proposition 1.4 *Es sei G eine Lie Gruppe.*

- (a) *Ist $H \subseteq G$ eine Untergruppe, die auch eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von G ist, dann ist H eine Lie Untergruppe.*
- (b) *Ist $H \subseteq G$ eine offene Untergruppe, dann ist H eine eingebettete Lie Untergruppe. Außerdem ist H abgeschlossen und damit eine Vereinigung von Zusammenhangskomponenten von G .*

Beweis: Zum Beweis von (a) brauchen wir nur zu zeigen, dass die Multiplikation $H \times H \rightarrow H$ glatt ist. Da die Multiplikation als Abbildung von $G \times G$ nach G glatt ist, ist ihre Einschränkung sicher glatt als Abbildung von $H \times H$ nach G (das gilt auch, wenn H bloß immersiert ist). Da aber H eine Untergruppe ist, bildet die Multiplikation $H \times H$ nach H ab, womit aus [ANMA, Korollar 5.16] und der Voraussetzung, dass H eingebettet ist, die gewünschte Behauptung folgt.

Ist nun H offen, so ist die Inklusionsabbildung $\iota : H \hookrightarrow G$ eine Einbettung und damit H eingebettet. Da weiters jede Nebenklasse $gH = \{gh : h \in H\}$ als Bild der offenen Menge H unter dem Diffeomorphismus L_g auch offen ist, ist $G \setminus H$ als Vereinigung der Nebenklassen, die von H verschieden sind, offen. Somit ist H abgeschlossen in G und damit H als offene und abgeschlossene Menge eine Vereinigung von Zusammenhangskomponenten. ■

Definition. Ist G eine Gruppe und $S \subseteq G$, dann nennt man die kleinste Untergruppe, die S enthält, die von S erzeugte Untergruppe.

Bemerkung.

- (a) Die von S erzeugte Untergruppe stimmt mit der Menge aller Elemente aus G überein, die als endliche Produkte von Elementen aus S dargestellt werden können.

Wie das folgende Resultat zeigt, erzeugen beliebige Umgebungen des neutralen Elements einer Lie Gruppe bereits 'große' Untergruppen.

Proposition 1.5 *Es sei G eine Lie Gruppe und $W \subseteq G$ eine beliebige Umgebung des neutralen Elements. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (a) *W erzeugt eine offene Untergruppe von G .*
- (b) *Ist W zusammenhängend, dann erzeugt W eine zusammenhängende offene Untergruppe von G .*
- (c) *Ist G zusammenhängend, dann erzeugt W ganz G .*

Beweis: ad (a). Es sei H die von W erzeugte Untergruppe von G . Für Teilmengen A und B von G bezeichne

$$AB = \{ab : a \in A, b \in B\}, \quad A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\}.$$

Für $k \in \mathbb{N}$ sei W_k die Menge aller Elemente von G , die durch Produkte von k oder weniger Elementen aus $W \cup W^{-1}$ dargestellt werden können. Dann ist H die Vereinigung aller Mengen W_k mit $k \in \mathbb{N}$. Als Bild von W unter der Inversion (die ein Diffeomorphismus ist) ist W^{-1} offen. Daher ist $W_1 = W \cup W^{-1}$ offen und für jedes $k > 1$ gilt

$$W_k = W_1 W_{k-1} = \bigcup_{g \in W_1} L_g(W_{k-1}).$$

Da jede Linkstranslation L_g ein Diffeomorphismus ist, folgt durch Induktion, dass W_k offen ist und damit, dass auch H offen ist.

ad (b). Ist W zusammenhängend, dann ist auch W^{-1} als Bild von W unter einem Diffeomorphismus zusammenhängend. Auch die Menge $W_1 = W \cup W^{-1}$ ist zusammenhängend, da sie Vereinigung von zusammenhängenden Mengen ist, die das neutrale Element gemeinsam haben. Damit ist auch die Menge $W_2 = m(W_1 \times W_1)$ zusammenhängend, da sie Bild einer zusammenhängenden Menge unter der stetigen Gruppenmultiplikation m ist. Durch Induktion erhält man daher, dass die Mengen $W_k = m(W_1 \times W_{k-1})$ ebenfalls zusammenhängend sind für jedes $k \in \mathbb{N}$. Daher ist auch die Untergruppe $H = \bigcup_k W_k$ zusammenhängend, da sie Vereinigung von zusammenhängenden Mengen ist, die das neutrale Element gemeinsam haben.

ad (c). Ist G zusammenhängend ist, so folgt aus Proposition 1.4 (b) sofort $G = H$. ■

Wir bezeichnen im folgenden mit G_0 die Zusammenhangskomponente der Lie Gruppe G , die das neutrale Element enthält.

Lemma 1.6 *Die Zusammenhangskomponente der Identität ist ein Normalteiler von G und die einzige zusammenhängende offene Untergruppe von G . Jede Zusammenhangskomponente von G ist diffeomorph zu G_0 .*

Beweis: Sind $g, h \in G_0$, dann gibt es glatte Kurven, die g bzw. h mit e verbinden. Das punktweise Produkt dieser Kurven ist dann aber eine glatte Kurve, die gh mit e verbindet, womit $gh \in G_0$. Analog zeigt man, dass $g^{-1} \in G_0$ liegt. Daher ist G_0 eine Untergruppe und damit eine eingebettete offene Lie Untergruppe.

Ist H eine weitere zusammenhängende offene Untergruppe von G , dann muss $H \subseteq G_0$ gelten, da G_0 Zusammenhangskomponente von G ist und G und H beide das neutrale Element enthalten. Nach Proposition 1.4 (b) folgt dann sofort $G_0 = H$.

Da die Konjugation C_g bezüglich eines beliebigen Elements $g \in G$ ein Lie Gruppen Isomorphismus ist, ist $C_g(G_0)$ eine zusammenhängende offene Untergruppe von G , womit $C_g(G_0) = G_0$ für alle $g \in G$. Damit ist G_0 ein Normalteiler.

Jede Linksnebenklasse gG_0 ist das Bild von G_0 unter dem Diffeomorphismus L_g , womit gG_0 eine zusammenhängende offene Teilmenge von G ist. Da aber G die Vereinigung aller solcher Linksnebenklassen ist, stimmen die Zusammenhangskomponenten von G gerade mit diesen Linksnebenklassen von G_0 überein. ■

Unser nächstes Resultat zeigt, wie man mit Hilfe von Lie Gruppen Homomorphismen viele Beispiele eingebetteter Lie Untergruppen bekommen kann.

Proposition 1.7 *Es sei $F : G \rightarrow H$ ein Lie Gruppen Homomorphismus.*

- (a) *Der Kern von F ist eine eingebettete Lie Untergruppe von G , deren Kodimension gleich dem Rang von F ist.*
- (b) *Ist F injektiv, dann hat das Bild von F eine eindeutig bestimmte glatte Struktur, sodass $F(G)$ eine Lie Untergruppe von H und $F : G \rightarrow F(G)$ ein Lie Gruppen Isomorphismus ist.*

Beweis: Da F nach Satz 1.2 konstanten Rang hat, ist der Kern von F , also die Menge $F^{-1}(e)$, nach [ANMA, Satz 5.6] eine eingebettete Untermannigfaltigkeit der Kodimension $\text{rank } F$. Proposition 1.4 liefert nun Behauptung (a).

Zum Beweis von (b) beachte zunächst, dass der konstante Rang und die Injektivität von F , nach [ANMA, Satz 4.10] implizieren, dass F eine glatte Immersion ist. Der Beweis von [ANMA, Proposition 5.11] zeigt daher, dass $F(G)$ eine eindeutige glatte Struktur besitzt, sodass $F(G)$ eine immensierte Untermannigfaltigkeit von H und $F : G \rightarrow F(G)$ ein Diffeomorphismus wird. Damit ist $F(G)$ eine Lie Untergruppe und $F : G \rightarrow F(G)$ als Gruppenisomorphismus und Diffeomorphismus ein Lie Gruppen Isomorphismus. ■

Wir werden etwas später sehen, dass in der Aussage (b) von Proposition 1.7 auf die Voraussetzung der Injektivität auch verzichtet werden kann.

Beispiele.

- (a) Als Untergruppe und eingebettete Untermannigfaltigkeit von \mathbb{C}^* ist \mathbb{S}^1 eine eingebettete Lie Untergruppe von \mathbb{C}^* .
- (b) Die Untergruppe $\text{GL}^+(n, \mathbb{R})$ von $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ ist offen und damit eine eingebettete Lie Untergruppe.
- (c) Die spezielle lineare Gruppe $\text{SL}(n, \mathbb{R})$ ist der Kern des Lie Gruppen Homomorphismus $\det : \text{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$ und daher eine eingebettete Lie Untergruppe. Nach [ANMA, Satz 4.10] ist \det als surjektive Abbildung eine Submersion, womit $\text{SL}(n, \mathbb{R})$ Dimension $n^2 - 1$ hat.

Analog ist die komplexe spezielle lineare Gruppe $\text{SL}(n, \mathbb{C})$ der Kern des surjektiven Lie Gruppen Homomorphismus $\det : \text{GL}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^*$. Damit ist $\text{SL}(n, \mathbb{C}) = \ker \det$ eine eingebettete Lie Untergruppe der Kodimension $\dim \mathbb{C}^* = 2$, also der Dimension $2n^2 - 2$.

- (d) Die Abbildung $\beta : \text{GL}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \text{GL}(2n, \mathbb{R})$, die definiert ist durch das Ersetzen jedes komplexen Matrixkoeffizienten $a + ib$ durch die 2×2 reelle Matrix

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

ist ein injektiver Lie Gruppen Homomorphismus. Damit ist $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ isomorph zum Bild von β , welches eine eingebettete Untergruppe von $\text{GL}(2n, \mathbb{R})$ ist.

(e) Ist $\alpha \in \mathbb{R}$ irrational, dann ist die Abbildung $\gamma_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2$, definiert durch

$$\gamma_\alpha(t) = (e^{2\pi it}, e^{2\pi i\alpha t}),$$

eine injektive Immersion, deren Bild eine dichte immersierte Lie Untergruppe H von \mathbb{T}^2 bildet, die nicht eingebettet ist.

Bezeichnen wir mit $S \subseteq \mathbb{T}^3$ das Bild der Untergruppe H von \mathbb{T}^2 unter der üblichen Einbettung $\mathbb{T}^2 \hookrightarrow \mathbb{T}^3$, dann ist S eine Lie Untergruppe von \mathbb{T}^3 , die nicht abgeschlossen, eingebettet oder dicht ist. Aber S ist der Abschluss einer eingebetteten Lie Untergruppe von \mathbb{T}^3 .

Wir werden später sehen, dass die Untergruppe S aus Beispiel (e) typisch ist für nicht eingebettete Lie Untergruppen, in dem Sinn, dass diese alle dichte Untergruppen von eingebetteten Lie Untergruppen sind.

Im Allgemeinen kann eine Untermannigfaltigkeit abgeschlossen ohne eingebettet zu sein (siehe etwa Beispiel (e) in [ANMA, Seite 39]). Umgekehrt folgt aus dem Beispiel der offenen Einheitskugel im \mathbb{R}^n , dass eine Untermannigfaltigkeit auch eingebettet sein kann, ohne abgeschlossen zu sein. Unser nächstes Resultat zeigt jedoch, dass für Lie Untergruppen Abgeschlossenheit und die Eigenschaft eingebettet zu sein, nicht unabhängig voneinander sind.

Satz 1.8 *Es sei G eine Lie Gruppe. Eine Lie Untergruppe $H \subseteq G$ ist genau dann abgeschlossen in G wenn H eingebettet ist.*

Beweis: Wir nehmen zunächst an, dass H eingebettet ist. Um zu zeigen, dass H dann abgeschlossen ist, sei $g \in \text{cl } H$ beliebig gewählt. Dann gibt es eine Folge $h_i \in H$, die gegen g konvergiert. Es sei U die Kartenumgebung einer Schnittkarte für H , die das neutrale Element e enthält. Sei weiters W eine Umgebung von e mit $\text{cl } W \subseteq U$. Da die Abbildung $f : G \times G \rightarrow G$, definiert durch $f(g_1, g_2) = g_1 g_2^{-1}$ stetig ist, gibt es eine Umgebung V von e , sodass $V \times V \subseteq f^{-1}(W)$, oder anders ausgedrückt, dass $g_1 g_2^{-1} \in W$ wann immer $g_1, g_2 \in V$.

Da $h_i g^{-1} \rightarrow e$, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $h_i g^{-1} \in V$ für alle i . Das bedeutet aber

$$h_i h_j^{-1} = (h_i g^{-1})(h_j g^{-1})^{-1} \in W$$

für alle i, j . Halten wir nun j fest und lassen i gegen Unendlich gehen, so erhalten wir

$$h_i h_j^{-1} \rightarrow g h_j^{-1} \in \text{cl } W \subseteq U.$$

Als Schnitt ist $H \cap U$ abgeschlossen in U , womit auch $g h_j^{-1} \in H$ und damit $g \in H$. Also ist H abgeschlossen.

Es sei nun H eine abgeschlossene Lie Untergruppe von G mit $\dim H = m$ und $\dim G = n$. Wir wollen zeigen, dass H eingebettet ist. Ist $m = n$, dann folgt aus [ANMA, Satz 4.6], dass die Inklusionsabbildung $\iota : H \hookrightarrow G$ eine offene Abbildung und damit eine topologische Einbettung ist. Daher ist ι eine glatte Einbettung und H eine eingebettete Lie Untergruppe.

Es sei nun $m < n$. Dann genügt es zu zeigen, dass es ein $h_1 \in H$ und eine Umgebung U_1 von h_1 in G gibt, sodass $H \cap U_1$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von U_1 ist. Ist nämlich $h \in H$ ein beliebiges Element, so bildet der Diffeomorphismus $R_{hh_1^{-1}} : G \rightarrow G$ einerseits H auf H ab und andererseits die Umgebung U_1 auf eine Umgebung U'_1 von h , sodass $U'_1 \cap H$ eingebettet ist in U'_1 . Es folgt dann aus [ANMA, Lemma 5.1], dass H eingebettet ist.

Zum Auffinden von h_1 und U_1 verwenden wir zunächst, dass jede immersierte Untermannigfaltigkeit lokal eingebettet ist (siehe [ANMA, Lemma 5.12]). Daher gibt es eine Umgebung V von e in H und eine Schnittkarte (U, φ) für V in G mit Zentrum in e . Indem wir U falls notwendig weiter einschränken, können wir annehmen, dass U ein Koordinatenwürfel ist und die Menge $U \cap V$ die Menge der Punkte mit Koordinaten $(x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0)$. Es bezeichne $S \subseteq U$ die Menge der Punkte mit Koordinaten der Form $(0, \dots, 0, x^{m+1}, \dots, x^n)$. Dann ist S eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von U und damit auch von G . Da $T_e V$ in diesen Koordinaten von den ersten m und $T_e S$ von den letzten $n - m$ Koordinatenvektoren aufgespannt wird, haben wir $T_e G = T_e V \oplus T_e S$.

Wir betrachten nun die Einschränkung der Gruppenmultiplikation $m : V \times S \rightarrow G$. Nach Proposition 1.1 (a) ist $dm_{(e,e)}(v, w) = v + w$ für alle $v \in T_e V$ und $w \in T_e S$. Daher ist $dm_{(e,e)}$ bijektiv und nach [ANMA, Satz 4.6] gibt es zusammenhängende Umgebungen W_0 von (e, e) in $V \times S$ und U_0 von e in G , sodass $m : W_0 \rightarrow U_0$ ein Diffeomorphismus ist. Indem wir falls notwendig die Umgebung W_0 verkleinern, können wir annehmen, dass W_0 von der Form $V_0 \times S_0$ ist mit Umgebungen des neutralen Elements V_0 in V und S_0 in S .

Es sei nun $K = S_0 \cap H$. Wir wollen nun folgende Behauptungen zeigen:

(i) $m(V_0 \times K) = H \cap U_0$.

(ii) K ist eine diskrete Menge in Bezug auf die Topologie von H .

Zum Beweis von (i) sei $(h, g) \in V_0 \times S_0$ beliebig. Da H eine Untergruppe ist und $V_0 \subseteq H$, folgt genau dann $hg \in H$, wenn $g \in H$. Mit anderen Worten haben wir also genau dann $m(h, g) \in H \cap U_0$ wenn $(h, g) \in V_0 \times K$.

Um (ii) zu zeigen, sei $h \in K$. Die Rechtstranslation $R_h : H \rightarrow H$ ist ein Diffeomorphismus von H , der e auf h und V_0 auf eine Umgebung V_h von h in H abbildet. Beachte, dass $V_h = R_h(V_0) = m(V_0 \times h)$, während $K = m(\{e\} \times K)$. Da m injektiv ist auf $V_0 \times S_0$, folgt weiter

$$V_h \cap K = m(\{e\} \times \{h\}) = \{h\}.$$

Damit ist jeder Punkt $h \in K$ isoliert in H , womit K diskret ist.

Als diskrete Teilmenge der Mannigfaltigkeit H ist K abzählbar. Da H abgeschlossen ist in G , folgt, dass $K = S_0 \cap H$ abgeschlossen ist in S_0 . Da in einem lokal kompakten Hausdorffraum jede nicht leere abzählbare abgeschlossene Teilmenge mindestens einen isolierten Punkt besitzt, gibt es ein $h_1 \in K$, das isoliert ist in S_0 . (Ist H nicht abgeschlossen, so wäre dieser Schluss nicht möglich.) Es gibt daher eine Umgebung S_1 von h_1 in S_0 , sodass $S_1 \cap H = \{h_1\}$. Dann ist aber $U_1 = m(V_0 \times S_1)$ eine Umgebung von h_1 in G mit der gewünschten Eigenschaft, dass $U_1 \cap H$ der Schnitt $m(V_0 \times \{h_1\})$ in U_1 ist. ■

In Kapitel 3 werden wir in der Lage sein eine weitreichende Verallgemeinerung von Satz 1.8 zu beweisen, die besagt, dass jede topologisch abgeschlossene Untergruppe einer Lie Gruppe (von der aber nicht vorausgesetzt wird, dass sie eine Untermannigfaltigkeit ist) bereits eine eingebettete Lie Untergruppe ist.

Zum Abschluss dieses ersten Kapitels kommen wir zu einer der wichtigsten Anwendungen von Lie Gruppen in der Differentialgeometrie: Gruppenaktionen auf Mannigfaltigkeiten.

Definition. Ist G eine Gruppe und M eine Menge, so nennt man eine Abbildung $G \times M \rightarrow M$, $(g, p) \mapsto g \cdot p$, eine *Linksaktion* von G auf M , wenn

$$\begin{aligned} g_1 \cdot (g_2 \cdot p) &= (g_1 g_2) \cdot p && \text{für alle } g_1, g_2 \in G \text{ und } p \in M, \\ e \cdot p &= p && \text{für alle } p \in M. \end{aligned}$$

Eine *Rechtsaktion* ist eine Abbildung $M \times G \rightarrow M$, die analoge Bedingungen erfüllt.

Es sei nun G eine Lie Gruppe und M eine Mannigfaltigkeit. Eine Aktion von G auf M heißt *stetig*, wenn die die Aktion definierende Abbildung $G \times M \rightarrow M$ bzw. $M \times G \rightarrow M$ stetig ist. Eine Mannigfaltigkeit M versehen mit einer stetigen G -Aktion nennt man einen G -Raum. Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit und die Aktion glatt, dann heißt M ein *glatter G -Raum*.

Bemerkungen.

- (a) Wir werden hauptsächlich Linksaktionen betrachten. Dies ist keine besondere Einschränkung, da jede Rechtsaktion in eine Linksaktion konvertiert werden kann, indem $g \cdot p$ durch $p \cdot g^{-1}$ definiert wird. Analog kann eine Linksaktion in eine Rechtsaktion umgewandelt werden. Damit kann auch jede Aussage über Linksaktionen in ein Resultat über Rechtsaktionen übersetzt werden.
- (b) Definiert $\theta : G \times M \rightarrow M$ eine Linksaktion von G auf M , so schreiben wir oft $\theta_g(p)$ anstatt $g \cdot p$. Ist die Aktion θ stetig, so ist jede der Abbildungen $\theta_g : M \rightarrow M$ ein Homöomorphismus, da $\theta_{g^{-1}}$ eine stetige Inverse ist. Ist die Aktion glatt, dann ist jedes θ_g ein Diffeomorphismus.

Im Folgenden führen wir einige weitere Standardbegriffe über Gruppenaktionen ein.

Definition. Sei $\theta : G \times M \rightarrow M$ Linksaktion einer Gruppe G auf einer Menge M .

- Für $p \in M$ ist der *Orbit* von p unter der Aktion θ definiert durch

$$G \cdot p = \{g \cdot p : g \in G\}.$$

- Die Aktion θ heißt *transitiv*, wenn es zu je zwei $p, q \in M$ ein Element $g \in G$ gibt mit $g \cdot p = q$ bzw. wenn der Orbit jedes Punktes aus M ganz M ist.
- Die *Isotropiegruppe* G_p von $p \in M$ ist die Teilmenge von G definiert durch

$$G_p = \{g \in G : g \cdot p = p\}.$$

- Die Aktion θ heißt *frei*, wenn das einzige Element, das einen beliebigen Punkt aus M festhält, das neutrale Element ist, d.h., wenn $G_p = \{e\}$ für jedes $p \in M$.

Beispiele.

- (a) Ist G eine Lie Gruppe und M eine glatte Mannigfaltigkeit, dann ist die *triviale Aktion* von G auf M definiert durch $g \cdot p = p$ für alle $g \in G$. Offenbar ist die triviale Aktion glatt und die Isotropiegruppe von jedem Punkt ist ganz G .
- (b) Die natürliche Aktion von $GL(n, \mathbb{R})$ auf \mathbb{R}^n ist die Linksaktion gegeben durch Matrixmultiplikation $(A, x) \mapsto Ax$. Offenbar ist diese Aktion glatt und besitzt genau die beiden Orbits $\{0\}$ und $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- (c) Die Einschränkung der natürlichen Aktion von $GL(n, \mathbb{R})$ auf $O(n) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert eine glatte Linksaktion von $O(n)$ auf \mathbb{R}^n . Die Orbits dieser Aktion sind genau die Sphären mit Mittelpunkt im Ursprung.
Einschränkung der Aktion von $O(n)$ auf $O(n) \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ definiert eine transitive glatte Linksaktion von $O(n)$ auf \mathbb{S}^{n-1} . Weitere Einschränkung dieser Aktion definiert eine glatte Aktion von $SO(n)$ auf \mathbb{S}^{n-1} . Für $n = 1$ ist diese Aktion trivial, da $SO(1) = \{\text{Id}\}$. Für $n > 1$, wirkt $SO(n)$ transitiv auf \mathbb{S}^{n-1} .
- (d) Jede Lie Gruppe G agiert glatt, frei und transitiv auf sich selbst durch Links- oder Rechtsaktion. Ist allgemeiner H eine Lie Untergruppe von G dann ist die Einschränkung der Multiplikation auf $H \times G \rightarrow G$ eine glatte und freie Linksaktion von H auf G . Analog definiert die Einschränkung $G \times H \rightarrow G$ eine Rechtsaktion von H auf G .
Die Lie Gruppe G wirkt außerdem glatt auf sich selbst durch Konjugation $g \cdot h = ghg^{-1}$. Für $h \in G$ ist die Isotropiegruppe G_h genau die Menge aller Elemente aus G , die mit h kommutieren.
- (e) Die Aktion einer diskreten Gruppe Γ auf einer Mannigfaltigkeit M ist genau dann glatt, wenn für jedes $g \in \Gamma$, die Abbildung $M \rightarrow M, p \mapsto g \cdot p$, glatt ist.

Wir kommen nun zu einer wichtigen Klasse von Abbildungen zwischen G -Räumen:

Definition. Es seien M und N beides (links) G -Räume. Eine Abbildung $F : M \rightarrow N$ heißt *äquivariant* in Bezug auf die gegebenen G -Aktionen, wenn für jedes $g \in G$

$$F(g \cdot p) = g \cdot F(p).$$

Die Definition für Rechtsaktionen ist analog.

Beispiele.

- (a) Es sei $v = (v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein beliebiger fest gewählter Vektor. Wir definieren glatte Linksaktionen von \mathbb{R} auf \mathbb{R}^n und \mathbb{T}^n durch

$$\begin{aligned} t \cdot (x^1, \dots, x^n) &= (x^1 + tv^1, \dots, x^n + tv^n), & (x^1, \dots, x^n) &\in \mathbb{R}^n; \\ t \cdot (z^1, \dots, z^n) &= (e^{2\pi it v^1} z^1, \dots, e^{2\pi it v^n} z^n), & (z^1, \dots, z^n) &\in \mathbb{T}^n. \end{aligned}$$

Die glatte Überlagerungsabbildung $\varepsilon^n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ gegeben durch

$$\varepsilon^n(x^1, \dots, x^n) = (e^{2\pi i x^1}, \dots, e^{2\pi i x^n})$$

ist äquivariant in Bezug auf diese Aktionen.

- (b) Es seien G und H Lie Gruppen und $F : G \rightarrow H$ ein Lie Gruppen Homomorphismus. Die Multiplikation von links definiert eine natürliche Linksaktion von G auf sich. Wir definieren nun eine Linksaktion θ von G auf H durch

$$\theta_g(h) = F(g)h.$$

Da F ein Homomorphismus ist, ist θ wohldefiniert. In Bezug auf θ und die natürliche Linksaktion von G auf sich ist F äquivariant, da

$$\theta_g \circ F(g') = F(g)F(g') = F(gg').$$

Der folgende Satz ist ein wesentliches Hilfsmittel, um zu zeigen, dass gewisse Abbildungen konstanten Rang haben.

Satz 1.9 *Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und G eine Lie Gruppe. Ist $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung, die äquivariant in Bezug auf eine transitive glatte G -Aktion auf M und eine glatte G -Aktion auf N ist, dann hat F konstanten Rang.*

Beweis: Es bezeichne θ und φ die G -Aktionen auf M bzw. N und es sei $p \in M$ beliebig. Da G transitiv auf M wirkt, gibt es zu jedem $q \in M$ ein Element $g \in G$ mit $\theta_g(p) = q$. Da F äquivariant ist, gilt $\varphi_g \circ F = F \circ \theta_g$. Dies impliziert für die zugehörigen Differentiale, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{dF_p} & T_{F(p)} N \\ d(\theta_g)_p \downarrow & & \downarrow d(\varphi_g)_{F(p)} \\ T_q M & \xrightarrow{dF_q} & T_{F(q)} N \end{array}$$

Da die linearen Abbildungen $d(\theta_g)_p$ und $d(\varphi_g)_{F(p)}$ Isomorphismen sind, müssen die horizontalen Abbildungen denselben Rang haben. Anders ausgedrückt, der Rang von F an einem beliebigen Punkt $q \in M$ stimmt mit dem Rang von F an p überein. Damit hat F konstanten Rang. ■

Ist G eine Lie Gruppe, die auf einer glatten Mannigfaltigkeit M durch eine glatte Linksaktion $\theta : G \times M \rightarrow M$ wirkt, so können wir für jedes $p \in M$ eine Abbildung $\theta^{(p)} : G \rightarrow M$ definieren durch

$$\theta^{(p)}(g) = g \cdot p.$$

Da das Bild von $\theta^{(p)}$ mit dem Orbit $G \cdot p$ übereinstimmt, nennt man $\theta^{(p)}$ die *Orbitabbildung*. Beachte auch, dass das Urbild $(\theta^{(p)})^{-1}(p)$ mit der Isotropiegruppe G_p übereinstimmt. Als erste Anwendung von Satz 1.9 beweisen wir die folgende wichtige Eigenschaft der Orbitabbildung.

Satz 1.10 *Es sei θ eine glatte Linksaktion einer Lie Gruppe G auf einer glatten Mannigfaltigkeit M . Für jedes $p \in M$ ist die Orbitabbildung $\theta^{(p)} : G \rightarrow M$ eine glatte Abbildung mit konstantem Rang. Insbesondere ist die Isotropiegruppe G_p für jedes $p \in M$ eine eingebettete Lie Untergruppe von G . Ist $G_p = \{e\}$, dann ist $\theta^{(p)}$ eine injektive Immersion und der Orbit $G \cdot p$ eine immersierte Untermannigfaltigkeit von M .*

Beweis: Die Orbitabbildung ist glatt, da sie als Zusammensetzung glatter Abbildungen geschrieben werden kann:

$$G \approx G \times \{p\} \hookrightarrow G \times M \xrightarrow{\theta} M.$$

Aus der Definition einer Gruppenaktion folgt, dass $\theta^{(p)}$ äquivariant ist in Bezug auf die Aktionen von G auf sich selbst durch Linkstranslation und auf M :

$$\theta^{(p)}(g'g) = (g'g) \cdot p = g' \cdot (g \cdot p) = g' \cdot \theta^{(p)}(g).$$

Da G transitiv auf sich selbst wirkt, folgt aus Satz 1.9, dass $\theta^{(p)}$ konstanten Rang hat. Damit ist G_p eine eingebettete Untermannigfaltigkeit nach [ANMA, Satz 5.6] und eine Lie Untergruppe nach Proposition 1.4 (a).

Nehmen wir nun an, dass $G_p = \{e\}$. Ist $\theta^{(p)}(g') = \theta^{(p)}(g)$, so folgt

$$g' \cdot p = g \cdot p \quad \Rightarrow \quad (g^{-1}g') \cdot p = p \quad \Rightarrow \quad g^{-1}g' = e \quad \Rightarrow \quad g = g',$$

womit $\theta^{(p)}$ injektiv und damit eine Immersion ist. Nach [ANMA, Proposition 5.11] ist daher der Orbit $G \cdot p$ eine immensierte Untermannigfaltigkeit von M . ■

Wir werden später sehen, dass in der letzten Aussage von Satz 1.10 auf die Voraussetzung $G_p = \{e\}$ verzichtet werden kann und *jeder* Orbit eine immensierte Untermannigfaltigkeit ist.

Als nächstes verwenden wir Satz 1.9, um uns die orthogonalen und unitären Gruppen noch einmal genauer anzusehen. Dazu bezeichne im Folgenden $M(n, \mathbb{R})$ bzw. $M(n, \mathbb{C})$ den Vektorraum der $n \times n$ Matrizen mit reellen/komplexen Einträgen.

Beispiele.

- (a) Für die glatte Abbildung $\Phi : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow M(n, \mathbb{R})$, die definiert ist durch $\Phi(A) = A^T A$, ist die *orthogonale Gruppe* $O(n)$ gerade das Level Set $\Phi^{-1}(I_n)$. Wir lassen nun $GL(n, \mathbb{R})$ durch Rechtstranslation (transitiv) auf sich wirken und definieren eine Rechtsaktion von $GL(n, \mathbb{R})$ auf $M(n, \mathbb{R})$ durch

$$X \cdot B = B^T X B, \quad X \in M(n, \mathbb{R}), B \in GL(n, \mathbb{R}).$$

Offenbar ist diese Aktion glatt und Φ äquivariant, denn

$$\Phi(AB) = (AB)^T(AB) = B^T A^T A B = B^T \Phi(A) B = \Phi(A) \cdot B.$$

Damit hat Φ nach Satz 1.9 konstanten Rang, womit $O(n)$ eine eingebettete Lie Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$ ist. Um die Dimension von $O(n)$ zu ermitteln, müssen wir den Rang von Φ berechnen. Da Φ konstanten Rang hat, genügt es diesen an der Identität $I_n \in GL(n, \mathbb{R})$ zu bestimmen. Dazu definieren wir für $B \in T_{I_n} GL(n, \mathbb{R}) = M(n, \mathbb{R})$, die Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ durch $\gamma(t) = I_n + tB$. Dann ist

$$d\Phi_{I_n}(B) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi \circ \gamma(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (I_n + tB)^T (I_n + tB) = B^T + B.$$

Aus dieser Formel folgt, dass das Bild von $d\Phi_{I_n}$ mit dem Unterraum der symmetrischen Matrizen in $M(n, \mathbb{R})$ mit Dimension $n(n+1)/2$ übereinstimmt. Damit ist die Dimension von $O(n)$ gleich $n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2$.

- (b) Die *spezielle orthogonale Gruppe* $SO(n)$ ist die Zusammenhangskomponente von $O(n)$, welche die Identität enthält, und daher eine offene Untergruppe also nach Proposition 1.4 (b) ebenfalls eine eingebettete Lie Untergruppe der Dimension $n(n-1)/2$ von $GL(n, \mathbb{R})$.
- (c) Für die glatte Abbildung $\Psi : GL(n, \mathbb{C}) \rightarrow M(n, \mathbb{C})$, die definiert ist durch $\Psi(A) = A^*A$, ist die *unitäre Gruppe* $U(n)$ gerade das Level Set $\Psi^{-1}(I_n)$. Durch Ersetzen der Transponierten durch die Adjungierte in den Argumenten aus (a) folgt wieder, dass Ψ konstanten Rang hat und damit, dass $U(n)$ eine eingebettete Lie Untergruppe von $GL(n, \mathbb{C})$ ist. Analoge Rechnung wie in (a) ergibt für das Differential von Ψ an der Identität

$$d\Psi_{I_n}(B) = B^* + B$$

für alle $B \in T_{I_n} GL(n, \mathbb{C}) = M(n, \mathbb{C})$. Damit stimmt das Bild von $d\Psi_{I_n}$ mit der Menge der Matrizen $A \in M(n, \mathbb{C})$ mit $A^* = A$ überein. Dies ist offenbar ein reeller Vektorraum der Dimension n^2 , womit $\dim U(n) = 2n^2 - n^2 = n^2$.

- (d) Die *spezielle unitäre Gruppe* $SU(n)$ ist der Kern des Lie Gruppen Homomorphismus $\det : U(n) \rightarrow \mathbb{S}^1$ und daher eine eingebettete Lie Untergruppe der Dimension $n^2 - 1$ von $U(n)$. Da die Zusammensetzung glatter Einbettungen wieder eine glatte Einbettung ist, impliziert dies, dass $SU(n)$ auch eingebettete Lie Untergruppe von $GL(n, \mathbb{C})$ ist.

Gruppenaktionen sind ein weiteres Werkzeug mit dessen Hilfe man neue Lie Gruppen konstruieren kann.

Definition. Es seien H und N Lie Gruppen und $\theta : H \times N \rightarrow N$ eine glatte Linksaktion von H auf N , die durch Automorphismen agiert, d.h. für jedes $h \in H$ ist $\theta_h : N \rightarrow N$ ein Isomorphismus. Das *semidirekte Produkt* $N \rtimes_{\theta} H$ von H und N ist die Lie Gruppe definiert wie folgt: Als glatte Mannigfaltigkeit stimmt $N \rtimes_{\theta} H$ mit der Produktmannigfaltigkeit $N \times H$ überein, aber die Gruppenmultiplikation ist definiert durch

$$(n, h)(n', h') = (n\theta_h(n'), hh').$$

Beispiel.

Betrachten wir \mathbb{R}^n als Lie Gruppe versehen mit der gewöhnlichen Addition, dann agiert die orthogonale Gruppe $O(n)$ auf \mathbb{R}^n mit ihrer natürlichen Wirkung durch Automorphismen. Das resultierende semidirekte Produkt $E(n) = \mathbb{R}^n \rtimes O(n)$ ist die *Euklidische Bewegungsgruppe*. Die Multiplikation auf $E(n)$ ist dann gegeben durch $(x, A)(x', A') = (x + Ax', AA')$ und ihre natürliche Wirkung auf \mathbb{R}^n ist

$$(x, A) \cdot y = x + Ay.$$

Die folgende Proposition, die wir ohne Beweis angeben, enthält zwei sehr nützliche Charakterisierungen semidirekter Produkte, mit deren Hilfe viele Lie Gruppen als semidirekte Produkte realisiert werden können.

Proposition 1.11 *Es seien G, H und N Lie Gruppen.*

- (a) *Sind $N, H \subseteq G$ abgeschlossene Untergruppen, N ein Normalteiler, $NH = G$ und $N \cap H = \{e\}$, dann ist die Abbildung $(n, h) \mapsto nh$ ein Lie Gruppen Isomorphismus zwischen $N \rtimes_{\theta} H$ und G , wobei $\theta : H \times N \rightarrow N$ die durch die Konjugation induzierte Aktion ist: $\theta_h(n) = hnh^{-1}$.*
- (b) *Die Lie Gruppe G ist genau dann isomorph zu $N \rtimes H$, wenn es Lie Gruppen Homomorphismen $\varphi : G \rightarrow H$ und $\psi : H \rightarrow G$ gibt, sodass $\varphi \circ \psi = \text{id}_H$ und $\ker \varphi = N$.*

Beispiele.

- (a) $O(n) \cong SO(n) \rtimes O(1)$.
- (b) $U(n) \cong SU(n) \rtimes U(1)$.
- (c) $GL(n, \mathbb{R}) \cong SL(n, \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}^*$.
- (d) $GL(n, \mathbb{C}) \cong SL(n, \mathbb{C}) \rtimes \mathbb{C}^*$.

Zu den wichtigsten Aktionen von Lie Gruppen gehören die durch Darstellungen induzierten.

Definition. Eine (endlich-dimensionale) *Darstellung* einer Lie Gruppe G ist ein Lie Gruppen Homomorphismus $\rho : G \rightarrow GL(V)$ für einen endlich-dimensionalen reellen oder komplexen Vektorraum V . Jede Darstellung induziert eine glatte Linksaktion von G auf V durch

$$g \cdot v = \rho(g)v, \quad g \in G, v \in V.$$

Eine Aktion von G auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum V heißt *linear*, wenn für jedes $g \in G$ die Abbildung $V \rightarrow V, v \mapsto g \cdot v$ linear ist.

Wie das folgende Resultat zeigt, entsprechen die linearen Gruppenaktionen auf einem Vektorraum genau den Darstellungen von Gruppen.

Proposition 1.12 *Es sei G eine Lie Gruppe und V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Eine glatte Aktion von G auf V ist genau dann linear, wenn sie von der Form $g \cdot v = \rho(g)v$ für eine geeignete Darstellung ρ von G ist.*

Beweis: Da jede von einer Darstellung induzierte Gruppenaktion linear ist, genügt es die Umkehrung dieser Aussage zu zeigen. Dazu sei eine lineare Aktion einer Lie Gruppe G auf V gegeben, also für jedes $g \in G$ ein $\rho(g) \in GL(V)$, sodass $g \cdot x = \rho(g)x$ für alle $x \in V$. Aus den Axiomen einer Gruppenaktion folgt $\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1) \rho(g_2)$, womit $\rho : G \rightarrow GL(V)$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Es bleibt zu zeigen, dass ρ glatt ist. Dazu sei $E_i, 1 \leq i \leq \dim V$, eine Basis von V und $\pi^i : V \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichne die Projektion auf die i te Koordinate bezüglich dieser Basis. Dann gilt für die Matrixkoeffizienten von $\rho(g)$ in Bezug auf diese Basis $\rho_i^j(g) = \pi^i(g \cdot E_j)$, womit jede der Funktionen ρ_j^i als Zusammensetzung glatter Funktionen glatt ist. Da Matrixkoeffizienten globale glatte Koordinaten für $GL(V)$ bilden, folgt die Glattheit von ρ . ■

Eine Darstellung $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ einer Gruppe G heißt *treu*, wenn ρ injektiv ist.

Proposition 1.13 *Eine Lie Gruppe besitzt genau dann eine treue Darstellung, wenn sie isomorph zu einer Lie Untergruppe von $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ oder $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ ist.*

Beweis: Ist $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ eine treue Darstellung, so ist nach Proposition 1.7 (b) $\rho(G)$ eine Lie Untergruppe von $\text{GL}(V) \cong \text{GL}(n, \mathbb{R})$ oder $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ und ρ ist ein Isomorphismus zwischen G und $\rho(G)$. Die Umkehrung ist trivial. ■

Bemerkung.

- (a) Die bisher aufgetretenen Lie Gruppen können als Matrixgruppen, also Lie Untergruppen von $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ oder $\text{GL}(n, \mathbb{C})$, realisiert werden. Eine natürliche Frage ist, ob dies allgemein gilt. Die Antwort darauf ist Nein! So lässt sich etwa zeigen, dass die universelle Überlagerungsgruppe (vgl. Kapitel 4) von $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ keine treue Darstellung besitzt und daher nicht isomorph zu einer Matrixgruppe ist.

Beispiele.

- (a) Ist G eine Lie Untergruppe von $\text{GL}(n, \mathbb{R})$, so ist die Inklusionsabbildung $G \hookrightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R}) = \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ eine treue Darstellung, genannt die definierende Darstellung von G .
- (b) Die Inklusionsabbildung $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{C}^* \cong \text{GL}(1, \mathbb{C})$ ist eine treue Darstellung der Kreisgruppe. Allgemeiner ist $\rho : \mathbb{T}^n \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$, gegeben durch $\rho(z_1, \dots, z_n) = \text{diag}(z^1, \dots, z^n)$, eine treue Darstellung von \mathbb{T}^n .
- (c) Die Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$, definiert durch

$$(x^1, \dots, x^n) \mapsto \text{diag}(e^{x^1}, \dots, e^{x^n})$$

ist ein Beispiel einer treuen Darstellung der additiven Lie Gruppe \mathbb{R}^n . Eine weitere Darstellung von \mathbb{R}^n ist gegeben durch

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C}), \quad (x^1, \dots, x^n) \mapsto \text{diag}(e^{2\pi i x^1}, \dots, e^{2\pi i x^n}).$$

Diese Darstellung ist nicht treu; ihr Kern ist die Untergruppe $\mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$.

- (d) Eine treue Darstellung der Euklidischen Bewegungsgruppe $E(n)$ ist gegeben durch $\rho : E(n) \rightarrow \text{GL}(n+1, \mathbb{R})$, definiert durch

$$\rho(b, A) = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei b als Spaltenmatrix betrachtet wird.

- (e) Es bezeichne \mathcal{P}_d^n den Vektorraum der reellwertigen Polynome $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ deren Grad höchstens d ist. Die Abbildung $\tau_d^n : \text{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}(\mathcal{P}_d^n)$, definiert durch

$$\tau_d^n(A)p = p \circ A^{-1},$$

ist eine treue Darstellung von $\text{GL}(n, \mathbb{R})$.

2 Lie Algebren, Distributionen und Blätterungen

Wir wenden uns in diesem Kapitel den Lie Algebren von Lie Gruppen zu. So wie Tangentialräume an eine Mannigfaltigkeit als „lineares Modell“ der Mannigfaltigkeit in der Nähe eines Punktes angesehen werden können, so kann auf dieselbe Weise die Lie Algebra einer Lie Gruppe als „lineares Modell“ der gesamten Gruppe angesehen werden, die viele der Eigenschaften der Gruppe widerspiegelt. Als Objekte der linearen Algebra sind Lie Algebren dabei oft aber einfacher zu analysieren als die entsprechenden Lie Gruppen.

Wir beginnen mit der wichtigen Beobachtung, dass das Tangentialbündel einer Lie Gruppe von besonders einfacher Bauart ist.

Proposition 2.1 *Für jede Lie Gruppe G ist die Abbildung*

$$G \times T_e G \rightarrow TG, \quad (g, v) \mapsto (g, d(L_g)_e v) \quad (2.1)$$

ein Diffeomorphismus.

Beweis: Es sei $\varphi : G \times T_e G \rightarrow TG \times TG$ definiert durch $\varphi(g, v) = ((g, 0), (e, v))$. Die Abbildung φ ist offensichtlich glatt und nach Proposition 1.1 (a) ist dann die glatte Abbildung $dm \circ \varphi : G \times T_e G \rightarrow TG$ gerade gegeben durch (2.1).

Umgekehrt sei $\psi : TG \rightarrow TG \times TG$ definiert durch $\psi((g, v)) = ((g^{-1}, 0), (g, v))$ was ebenfalls glatt ist, da die Inversion in G glatt ist. Nach Proposition 1.1 (a) erfüllt die glatte Abbildung $dm \circ \psi : TG \rightarrow TG$ dann

$$(dm \circ \psi)((g, v)) = (e, d(L_{g^{-1}})_g v) \in \{e\} \times T_e G.$$

Damit definiert auch $(g, v) \mapsto (g, d(L_{g^{-1}})_g v)$ eine glatte Abbildung $TG \rightarrow G \times T_e G$, welche offensichtlich die Inverse der Abbildung aus (2.1) ist. ■

Bemerkungen.

- (a) Der Diffeomorphismus (2.1) wird Linkstrivialisierung des Tangentialbündels TG genannt.
- (b) Anstatt der Linkstranslation in (2.1) hätte man auch die Rechtstranslation verwenden können. Dies würde zur sogenannten Rechtstrivialisierung des Tangentialbündels TG führen.

Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten. Im Allgemeinen muss für eine glatte Abbildung $F : M \rightarrow N$ und ein Vektorfeld $Y \in \mathfrak{X}(M)$ der *Pushforward* $F_* Y \in \mathfrak{X}(N)$ nicht existieren. Wir haben aber in [ANMA, Proposition 6.6] gesehen, dass dies tatsächlich immer der Fall ist, wenn F ein Diffeomorphismus ist. Insbesondere ist für jedes Element g einer Lie Gruppe G und jedes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(G)$ der Pushforward $(L_g)_* X$ definiert.

Definition. Ein Vektorfeld X auf G heißt *linksinvariant*, wenn $(L_g)_* X = X$ für alle $g \in G$ bzw. etwas expliziter

$$d(L_g)_{g'}(X_{g'}) = X_{gg'}$$

für alle $g, g' \in G$ gilt.

Bemerkungen.

- (a) Mit Hilfe des Pushforwards eines Vektorfeldes kann man auch einen Pullback von Vektorfeldern definieren: Ist $F : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus, dann ist der *Pullback* $F^*Y \in \mathfrak{X}(M)$ eines glatten Vektorfeldes Y auf N , definiert durch

$$F^*Y = F_*^{-1}Y.$$

- (b) In der Literatur werden linksinvariante Vektorfelder manchmal als invariante Vektorfelder gegenüber dem Pullback beliebiger Linkstranslationen definiert. Dies ist aber natürlich äquivalent zu der von uns gegebenen Definition.

Wir können Linkstranslationen auch dazu verwenden um Vektorfelder auf G aus einem gegebenen Tangentialvektor zu erzeugen:

Definition. Es sei G eine Lie Gruppe und $v \in T_eG$. Das Vektorfeld

$$v^L|_g = d(L_g)_e v$$

heißt das von v erzeugte (*linksinvariante*) Vektorfeld.

Bemerkung.

- (a) Jedes durch einen von Null verschiedenen Tangentialvektor $v \in T_eG$ erzeugte Vektorfeld verschwindet nirgends. Dies impliziert zum Beispiel, dass keine Sphäre gerader Dimension die Struktur einer Lie Gruppe tragen kann, da solche Sphären keine nichtverschwindenden Vektorfelder besitzen.

Da $(L_g)_*(aX + bY) = a(L_g)_*X + b(L_g)_*Y$ gilt, bildet die Menge aller glatten linksinvarianten Vektorfelder auf G einen linearen Unterraum von $\mathfrak{X}(G)$. Dieser Raum trägt aber noch mehr Struktur. Wie wir nämlich in [ANMA, Korollar 6.11] gezeigt haben, sind Pushforwards von Vektorfeldern (wenn sie existieren) mit Lie Klammern vertauschbar. Daraus folgt unmittelbar das folgende Resultat.

Korollar 2.2 *Es seien G eine Lie Gruppe und X, Y glatte linksinvariante Vektorfelder auf G . Dann ist auch $[X, Y]$ linksinvariant.*

Die Untersuchungen von Lie Gruppen haben zur Entdeckung von Lie Algebren geführt, welche aber mittlerweile den Kern eines eigenständigen Teilgebiets der Algebra bilden.

Definition. Eine *Lie Algebra* ist ein reeller oder komplexer Vektorraum \mathfrak{g} versehen mit einer bilinearen Operation, der *Lie Klammer*, $[\ , \] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, $(V, W) \mapsto [V, W]$, die folgenden Bedingungen genügt:

- (i) *Antisymmetrie:* Für alle $V, W \in \mathfrak{g}$, gilt

$$[V, W] = -[W, V].$$

- (ii) *Jacobi Identität:* Für alle $V, W, X \in \mathfrak{g}$ gilt

$$[V, [W, X]] + [W, [X, V]] + [X, [V, W]] = 0.$$

Ist \mathfrak{g} eine Lie Algebra, so heißt ein Unterraum $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine Lie Unteralgebra von \mathfrak{g} , wenn \mathfrak{h} unter der Lie Klammer abgeschlossen ist.

Sind \mathfrak{g} und \mathfrak{h} Lie Algebren, so heißt eine lineare Abbildung $A : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ ein Lie Algebren Homomorphismus, wenn $A[X, Y] = [AX, AY]$ für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$. Ist A bijektiv, so nennen wir A einen Lie Algebren Isomorphismus und \mathfrak{g} und \mathfrak{h} isomorphe Lie Algebren.

Beispiele.

- (a) Der Vektorraum $\mathfrak{X}(M)$ aller glatten Vektorfelder auf einer glatten Mannigfaltigkeit M versehen mit der Lie Klammer von Vektorfeldern ist eine Lie Algebra.
- (b) Ist G eine Lie Gruppe, dann ist der Vektorraum aller glatten linksinvarianten Vektorfelder auf G eine Lie Unter algebra von $\mathfrak{X}(G)$.
- (c) Der Vektorraum $M(n, \mathbb{R})$ aller reellen $n \times n$ Matrizen versehen mit der *Kommutatorklammer*

$$[A, B] = AB - BA$$

ist eine Lie Algebra, die wir mit $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ bezeichnen. Analog bezeichnet $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ die Lie Algebra aller komplexen $n \times n$ Matrizen mit der Kommutatorklammer. Ist allgemeiner V ein (endlich-dimensionaler) Vektorraum, so bezeichnet $\mathfrak{gl}(V)$ die Lie Algebra aller linearen Abbildung von V auf sich versehen mit der Kommutatorklammer

$$[A, B] = A \circ B - B \circ A.$$

- (d) Jeder reelle oder komplexe Vektorraum V kann als Lie Algebra, mit Lie Klammer definiert durch $[x, y] = 0$ für alle $x, y \in V$, aufgefasst werden. Lie Algebren mit trivialer Lie Klammer heißen *abelsch*.

Beispiel (b) von oben ist das für uns wichtigste Beispiel einer Lie Algebra.

Definition. Die *Lie Algebra* $\mathfrak{g} := \text{Lie}(G)$ einer Lie Gruppe G ist die Lie Algebra aller glatten linksinvarianten Vektorfelder auf G .

Wie der folgende wichtige Satz zeigt, ist $\text{Lie}(G)$ stets endlich-dimensional und hat dieselbe Dimension wie G .

Satz 2.3 *Es sei G eine Lie Gruppe. Die Abbildung $\varepsilon : \text{Lie}(G) \rightarrow T_e G$, definiert durch $\varepsilon(X) = X_e$, ist ein Vektorraum Isomorphismus mit Umkehrabbildung gegeben durch $\tau : T_e G \rightarrow \text{Lie}(G)$, $\tau(v) = v^L$. Insbesondere ist $\dim \text{Lie}(G) = \dim G$.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass die Abbildung τ wohldefiniert ist. Beachte, dass das Vektorfeld v^L nach dem ersten Teil des Beweises von Proposition 2.1 glatt ist. Um die Linksinvarianz von v^L nachzuweisen, müssen wir für alle $g, h \in G$ zeigen, dass $d(L_h)_g v^L|_g = v^L|_{hg}$. Dies folgt aber aus $L_h \circ L_g = L_{hg}$, denn

$$d(L_h)_g v^L|_g = (d(L_h)_g \circ d(L_g)_e)(v) = d(L_h \circ L_g)_e(v) = d(L_{hg})_e(v) = v^L|_{hg}.$$

Damit ist $v^L \in \text{Lie}(G)$ und τ wohldefiniert.

Offenbar sind die Abbildungen ε und τ nach Definition linear. Um zu zeigen, dass ε injektiv ist, sei $\varepsilon(X) = X_e = 0$ für ein $X \in \text{Lie}(G)$. Dann folgt aus der Linksinvarianz von X aber $X_g = d(L_g)_e X_e = 0$ für alle $g \in G$, womit $X = 0$. Die Surjektivität von ε folgt aus $\varepsilon(v^L) = v^L|_e = v$ für $v \in T_e G$. Es bleibt zu zeigen, dass τ die Umkehrabbildung von ε ist. Dazu sei $v \in T_e G$. Dann gilt einerseits

$$\varepsilon(\tau(v)) = \varepsilon(v^L) = v,$$

womit $\varepsilon \circ \tau$ die Identität auf $T_e G$ ist. Für $X \in \text{Lie}(G)$ haben wir andererseits

$$\tau(\varepsilon(X))_g = \tau(X_e)_g = d(L_g)_e X_e = X_g,$$

womit $\tau \circ \varepsilon = \text{Id}_{\text{Lie}(G)}$. ■

Bemerkungen.

- (a) Versehen wir den Tangentialraum $T_e G$ einer Lie Gruppe G mit der Lie Klammer

$$[v, w] := [v^L, w^L]_e,$$

dann gilt $[v, w]^L = [v^L, w^L]$ und der in Satz 2.3 definierte Vektorraum Isomorphismus wird zu einem Lie Algebren Isomorphismus.

- (b) Jedes linksinvariante grobe Vektorfeld auf einer Lie Gruppe ist glatt.

Beweis: Ist X ein linksinvariantes grobes Vektorfeld auf einer Lie Gruppe G und $v = X_e \in T_e G$, dann folgt $X = v^L$ und damit glatt. ■

- (c) Jede Lie Gruppe besitzt einen linksinvarianten glatten globalen Rahmen.

Beispiele.

- (a) *Endlich-dimensionale Vektorräume*

Das Differential der Linkstranslation $d(L_a)$ durch einen Vektor $a \in V$ wird in Koordinaten durch die Einheitsmatrix repräsentiert. Damit ist ein Vektorfeld $X = \sum_i X^i \partial / \partial x^i$ genau dann linksinvariant, wenn die Koeffizienten X^i konstant sind. Da $[X, Y] = 0$ für je zwei Vektorfelder X, Y mit konstanten Koeffizienten, ist die Lie Algebra von V abelsch, also $\text{Lie}(V) \cong V$.

- (b) *Direkte Produkte*

Für den Tangentialraum am neutralen Element eines direkten Produkts $G \times H$ zweier Lie Gruppen G und H gilt (als Vektorräume)

$$T_e(G \times H) = T_e G \oplus T_e H = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}.$$

Alle linksinvarianten Vektorfelder auf $G \times H$ sind daher gegeben durch

$$(g, h) \mapsto (v^L|_g, w^L|_h), \quad v \in \mathfrak{g}, w \in \mathfrak{h}.$$

Es folgt auf einfache Weise, dass die Lie Klammer auf $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ gegeben ist durch

$$[(v, w), (v', w')] = ([v, v']_{\mathfrak{g}}, [w, w']_{\mathfrak{h}}).$$

Dies liefert genau die *direkte Summe der Lie Algebren* \mathfrak{g} und \mathfrak{h} .

(c) Kreis \mathbb{S}^1 und n -Torus \mathbb{T}^n

In geeigneten Winkelkoordinaten ist die Linkstranslation um ϑ auf \mathbb{S}^1 einfach gegeben durch $\theta \mapsto \theta + \vartheta$. Eine Argumentation wie in (a) zeigt daher, dass $\text{Lie}(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{R}$ und daher 1-dimensional und abelsch ist.

Da $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ folgt aus (b) $\text{Lie}(\mathbb{T}^n) \cong \mathbb{R}^n$.

(d) Allgemeine Lineare Gruppe $\text{GL}(n, \mathbb{R})$

Nach Satz 2.3 sind $\text{Lie}(\text{GL}(n, \mathbb{R}))$ und der Tangentialraum von $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ an der Identität isomorphe Vektorräume. Da $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ eine offene Untermannigfaltigkeit des Vektorraumes $M(n, \mathbb{R})$ ist, ist dieser Tangentialraum isomorph zu $M(n, \mathbb{R})$. Damit sind $\text{Lie}(\text{GL}(n, \mathbb{R}))$ und $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ isomorph als Vektorräume, haben aber unabhängig voneinander definierte Lie Klammern. Es gilt jedoch: Die Zusammensetzung der natürlichen Isomorphismen

$$\text{Lie}(\text{GL}(n, \mathbb{R})) \longrightarrow T_{I_n} \text{GL}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$$

ist ein Lie Algebren Isomorphismus zwischen $\text{Lie}(\text{GL}(n, \mathbb{R}))$ und der Matrix Lie Algebra $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Dies folgt aus $C^L|_A = AC$ für alle $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ und $C \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, denn dadurch zeigt man leicht, dass

$$[C, D] = [C^L, D^L]_e = CD - DC, \quad C, D \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}).$$

Unter Verwendung des Lie Gruppen Homomorphismus β aus Beispiel (d) auf Seite 12 und Satz 2.4 zeigt man mit etwas mehr Aufwand, dass auch die Zusammensetzung der natürlichen Isomorphismen

$$\text{Lie}(\text{GL}(n, \mathbb{C})) \longrightarrow T_{I_n} \text{GL}(n, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$$

ein Lie Algebren Isomorphismus zwischen $\text{Lie}(\text{GL}(n, \mathbb{C}))$ und $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ ist.

(e) Allgemeine Lineare Gruppe $\text{GL}(V)$

Ist V ein endlich-dimensionaler reeller oder komplexer Vektorraum, so ist die Zusammensetzung der natürlichen Isomorphismen

$$\text{Lie}(\text{GL}(V)) \longrightarrow T_{\text{id}} \text{GL}(V) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

ein Lie Algebren Isomorphismus zwischen $\text{Lie}(\text{GL}(V))$ und $\mathfrak{gl}(V)$.

Lie Algebren von Lie Gruppen sind besonders wichtig für das Studium von Lie Gruppen, da jeder Lie Gruppen Homomorphismus einen Homomorphismus der zugehörigen Lie Algebren induziert:

Satz 2.4 *Es seien G, H Lie Gruppen, $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ ihre Lie Algebren und $F : G \rightarrow H$ ein Lie Gruppen Homomorphismus. Dann gibt es zu jedem $X \in \mathfrak{g}$ ein eindeutiges Vektorfeld $F_*X \in \mathfrak{h}$, das F -verwandt ist mit X . Die so definierte Abbildung $F_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ ist ein Lie Algebren Homomorphismus, genannt der durch F induzierte Lie Algebren Homomorphismus.*

Beweis: Wenn es ein Vektorfeld $Y \in \mathfrak{h}$ gibt, das F -verwandt mit $X \in \mathfrak{g}$ ist, dann muss $Y_e = dF_e(X_e)$ gelten. Damit ist aber Y eindeutig bestimmt durch

$$Y = (dF_e(X_e))^L.$$

Um zu zeigen, dass das so definierte Vektorfeld Y tatsächlich F -verwandt mit X ist, nutzen wir aus, dass F ein Homomorphismus ist, denn $F(gg') = F(g)F(g')$ bedeutet $F(L_g g') = L_{F(g)} F(g')$, womit $F \circ L_g = L_{F(g)} \circ F$ und damit

$$dF \circ d(L_g) = d(L_{F(g)}) \circ dF.$$

Insgesamt folgt

$$dF(X_g) = dF(d(L_g)(X_e)) = d(L_{F(g)})(dF(X_e)) = d(L_{F(g)})(Y_e) = Y_{F(g)}$$

was nach Definition bedeutet, dass X und Y F -verwandt sind.

Bezeichnet $F_* X$ für jedes $X \in \mathfrak{g}$ das eindeutige Vektorfeld in \mathfrak{h} , das F -verwandt ist mit X , so folgt aus [ANMA, Korollar 6.11], dass $F_*[X, Y] = [F_* X, F_* Y]$, womit F_* ein Lie Algebren Homomorphismus ist. ■

Bemerkung.

- (a) Beachte, dass nach Satz 2.4 für jedes linksinvariante Vektorfeld $X \in \mathfrak{g}$ der Pushforward $F_* X$ wohldefiniert ist, obwohl F nicht unbedingt ein Diffeomorphismus ist.

Beispiele.

- (a) Für den Lie Gruppen Homomorphismus $\det : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$ gilt

$$d(\det)_A(B) = (\det A) \mathrm{tr}(A^{-1}B).$$

Daraus folgt, dass der durch die Determinante induzierte Lie Algebren Homomorphismus durch die Spur $\mathrm{tr} : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben ist.

- (b) Eine *Darstellung* einer (endlich-dimensionalen) Lie Algebra \mathfrak{g} ist ein Lie Algebren Homomorphismus $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ für einen endlich-dimensionalen Vektorraum V . Ist G eine Lie Gruppe mit Lie Algebra \mathfrak{g} und $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung von G , dann ist $\rho_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung von \mathfrak{g} .

Im Gegensatz zu Lie Gruppen besitzen endlich-dimensionale (reelle oder komplexe) Lie Algebren stets eine treue Darstellung. Dieses Resultat ist als Satz von Ado bekannt und ein tief liegendes Ergebnis der Theorie von Lie Algebren. Insbesondere ist jede solche Lie Algebra isomorph zu einer Unter algebra von $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ bzw. $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$.

Unser nächstes Resultat enthält einige einfache Eigenschaften von induzierten Lie Algebren Homomorphismen.

Proposition 2.5 *Es seien G, H, K Lie Gruppen. Dann gelten folgende Aussagen:*

- (a) *Der Homomorphismus $(\mathrm{Id}_G)_* : \mathrm{Lie}(G) \rightarrow \mathrm{Lie}(G)$ ist die Identität auf $\mathrm{Lie}(G)$.*
 (b) *Sind $F_1 : G \rightarrow H$ und $F_2 : H \rightarrow K$ Lie Gruppen Homomorphismen, dann ist*

$$(F_2 \circ F_1)_* = (F_2)_* \circ (F_1)_* : \mathrm{Lie}(G) \rightarrow \mathrm{Lie}(K).$$

- (c) *Ist $F : G \rightarrow H$ ein Lie Gruppen Homomorphismus, der auch ein lokaler Diffeomorphismus ist, dann ist $F_* : \mathrm{Lie}(G) \rightarrow \mathrm{Lie}(H)$ ein Lie Algebren Isomorphismus. Insbesondere haben isomorphe Lie Gruppen auch isomorphe Lie Algebren.*

Beweis: Die beiden Relationen $d(\text{Id}_G)_e = \text{Id}_{T_e G}$ und $d(F_2 \circ F_1)_e = d(F_2)_e \circ d(F_1)_e$ gelten für Differentiale. Da der Wert des induzierten Lie Algebren Homomorphismus an einem linksinvarianten Vektorfeld X durch das Differential von X_e bestimmt ist, ergeben sich sofort (a) und (b). Ist $F : G \rightarrow H$ ein lokaler Diffeomorphismus, so ist dF_e bijektiv. Ist daher $F_* X = 0$ für ein linksinvariantes Vektorfeld X , so gilt $dF_e(X_e) = 0$, also $X_e = 0$ und daher $X = 0$. Es sei nun $Y \in \text{Lie}(H)$ und $\varepsilon : \text{Lie}(G) \rightarrow T_e G$ der kanonische Isomorphismus. Dann gilt

$$F_*(\varepsilon^{-1}((dF_e)^{-1}Y_e)) = Y,$$

womit F_* eine Bijektion ist. ■

Der Umstand, dass Lie Algebren von Vektorräumen und Tori abelsch sind, ist ein Spezialfall der folgenden allgemeineren Aussage, die wir mit Hilfe von Satz 2.4 nun zeigen können.

Proposition 2.6 *Ist G eine kommutative Lie Gruppe, dann ist die Lie Algebra \mathfrak{g} von G ebenfalls abelsch, d.h. die Lie Klammer auf \mathfrak{g} ist trivial.*

Beweis: Ist G kommutativ, dann gilt

$$(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1} = g^{-1}h^{-1}$$

für alle $g, h \in G$, womit die Inversion $\nu : G \rightarrow G$ ein Homomorphismus ist. Nach Satz 2.4 ist daher $\nu_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ ein Lie Algebren Homomorphismus. Aus Proposition 1.1 (b) folgt aber $\nu_*(X) = -X$ für alle $X \in \mathfrak{g}$, womit

$$-[X, Y] = \nu_*([X, Y]) = [\nu_*(X), \nu_*(Y)] = [-X, -Y] = [X, Y]$$

und damit $[X, Y] = 0$ für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$ gilt. ■

Ist G eine Lie Gruppe und $H \subseteq G$ eine Lie Untergruppe, so stellt sich die natürliche Frage, ob die Lie Algebra von H auch eine Unteralgebra der Lie Algebra von G ist. Dies kann aber so nicht direkt stimmen, da die Elemente von $\text{Lie}(H)$ Vektorfelder auf H und nicht auf G , also streng genommen keine Elemente von $\text{Lie}(G)$ sind. Das folgende Resultat erlaubt uns aber dennoch $\text{Lie}(H)$ als Unteralgebra von $\text{Lie}(G)$ aufzufassen.

Satz 2.7 *Es sei G eine Lie Gruppe, $H \subseteq G$ eine Lie Untergruppe und $\iota : H \hookrightarrow G$ die Inklusionsabbildung. Dann gibt es eine Lie Unteralgebra \mathfrak{h} von $\text{Lie}(G)$, die kanonisch isomorph zu $\text{Lie}(H)$ ist und auf folgende zwei Arten charakterisiert werden kann:*

$$\mathfrak{h} = \iota_*(\text{Lie}(H)) = \{X \in \text{Lie}(G) : X_e \in T_e H\}. \quad (2.2)$$

Beweis: Da die Inklusionsabbildung ein Lie Gruppen Homomorphismus ist, ist $\iota_*(\text{Lie}(H))$ eine Unteralgebra von $\text{Lie}(G)$. Nach Definition von induzierten Lie Algebren Homomorphismen, stimmt diese Unteralgebra genau mit dem Unterraum der linksinvarianten Vektorfelder auf G überein, deren Wert am neutralen Element von der Form $d\iota_e(v)$ für ein $v \in T_e H$ ist. Da die Inklusion von $T_e H$ in $T_e G$ auch über das Differential $d\iota_e : T_e H \rightarrow T_e G$ geschieht, stimmen die beiden Charakterisierungen von \mathfrak{h} aus (2.2) überein. Da $d\iota_e$ injektiv ist auf $T_e H$, folgt die Injektivität von ι_* auf $\text{Lie}(H)$ und damit nach Definition von \mathfrak{h} , dass ι_* ein Isomorphismus zwischen $\text{Lie}(H)$ und \mathfrak{h} ist. ■

Bemerkungen.

- (a) Nach Satz 2.7 bestimmt jedes Element von $\text{Lie}(H)$ ein eindeutiges linksinvariantes Vektorfeld in $\text{Lie}(G)$ durch den Wert am neutralen Element. Die Inklusion von $\text{Lie}(H)$ in $\text{Lie}(G)$ respektiert daher auch die Lie Klammer und wir identifizieren daher $\text{Lie}(H)$ im Folgenden stets mit der Unteralgebra \mathfrak{h} von $\text{Lie}(G)$.
- (b) Ist $F : G \rightarrow H$ ein Lie Gruppen Homomorphismus, dann ist der Kern von $F_* : \text{Lie}(G) \rightarrow \text{Lie}(H)$ gerade die Lie Algebra von $\ker F$.

Mit Hilfe von Satz 2.7 können wir nun die Lie Algebren der wichtigsten Matrix Lie Gruppen mit Unteralgebren von $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ identifizieren. Im Folgenden illustrieren wir an der orthogonalen Gruppe ausführlich wie man ihre Lie Algebra bestimmen kann. Für die anderen Gruppen verläuft dies analog.

Beispiele.

- (a) Die orthogonale Gruppe $O(n)$ ist eine Lie Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$ und stimmt (wie wir früher gesehen haben) mit dem Levelset $\Phi^{-1}(I_n)$ überein, wobei

$$\Phi : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow M(n, \mathbb{R}), \quad \Phi(A) = A^T A.$$

Nach [ANMA, Lemma 5.10] ist daher $T_{I_n}O(n)$ gerade durch den Kern von $d\Phi_{I_n} : T_{I_n}GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow T_{I_n}M(n, \mathbb{R})$ gegeben. Wie in Beispiel (a) auf Seite 18 gezeigt, ist $d\Phi_{I_n}(B) = B^T + B$, womit die Lie Algebra von $O(n)$ gegeben ist durch

$$\text{Lie}(O(n)) \cong \{B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) : B^T + B = 0\} := \mathfrak{o}(n).$$

- (b) Die Lie Algebren der speziellen linearen Gruppen sind gegeben durch

$$\text{Lie}(SL(n, \mathbb{R})) \cong \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) : \text{tr } A = 0\} := \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}).$$

und

$$\text{Lie}(SL(n, \mathbb{C})) \cong \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) : \text{tr } A = 0\} := \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}).$$

- (c) Die Lie Algebra der speziellen orthogonalen Gruppe ist gegeben durch

$$\text{Lie}(SO(n)) \cong \mathfrak{o}(n).$$

- (d) Die Lie Algebren der unitären und speziellen unitären Gruppen sind gegeben durch

$$\text{Lie}(U(n)) \cong \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) : A^* + A = 0\} := \mathfrak{u}(n)$$

und

$$\text{Lie}(SU(n)) \cong \mathfrak{u}(n) \cap \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) =: \mathfrak{su}(n).$$

Wir wissen nun, dass es zu jeder Lie Untergruppe einer Lie Gruppe G eine korrespondierende Lie Unteralgebra von $\text{Lie}(G)$ gibt. Als nächstes wollen wir uns mit der sehr viel tiefliegenden Frage beschäftigen, ob es es auch zu jeder Lie Unteralgebra von $\text{Lie}(G)$ eine korrespondierende Lie Untergruppe von G gibt. Dazu müssen wir zunächst eine Reihe von Hilfsmitteln entwickeln, beginnend mit Distributionen und Integralmannigfaltigkeiten.

Definition. Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit, so nennt man die Zuordnung eines k -dimensionalen Unterraums $D_p \subseteq T_p M$ zu jedem Punkt $p \in M$ eine k -dimensionale *Distribution* (oder Tangentialdistribution). Eine Distribution heißt glatt, wenn die disjunkte Vereinigung all dieser Unterräume $D = \coprod_{p \in M} D_p \subseteq TM$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von TM bildet.

Bemerkung.

- (a) Eine k -dimensionale Distribution $D \subseteq TM$ ist genau dann glatt, wenn jeder Punkt von M eine Umgebung U besitzt auf der es glatte Vektorfelder $X_1, \dots, X_k : U \rightarrow TM$ gibt, sodass $\{X_1|_q, \dots, X_k|_q\}$ eine Basis für D_q für jedes $q \in U$ bildet. In diesem Fall sagen wir D wird (lokal) von den Vektorfeldern X_1, \dots, X_k aufgespannt.

Definition. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $D \subseteq TM$ eine glatte Distribution. Eine nicht leere immersierte Untermannigfaltigkeit $N \subseteq M$ heißt eine *Integralmannigfaltigkeit* von D , wenn $T_p N = D_p$ für alle $p \in N$.

Wir wollen uns im Folgenden mit der wichtigen Frage beschäftigen, für welche glatten Distributionen Integralmannigfaltigkeiten existieren.

Beispiele.

- (a) Ist X ein nicht-verschwindendes Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit M , dann bestimmt X durch die Zuordnung $D_p = \text{span } X_p$ für jedes $p \in M$ eine glatte Distribution D der Dimension 1. Das Bild jeder Integralkurve von X ist eine Integralmannigfaltigkeit von D .
- (b) Im \mathbb{R}^n spannen die Koordinatenfelder $\{\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^k\}$ eine k -dimensionale Distribution auf. Die zum \mathbb{R}^k parallelen k -dimensionalen affinen Unterräume bilden zugehörige Integralmannigfaltigkeiten.
- (c) Es sei D die glatte Distribution im \mathbb{R}^3 , die durch

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y}$$

aufgespannt wird. Dann gibt es zu D keine Integralmannigfaltigkeiten. Um dies zu sehen, sei N eine Integralmannigfaltigkeit durch den Ursprung. Da X und Y tangential zu N sind, kann man zeigen, dass jede Integralkurve von X und Y mit Startpunkt in N für kurze Zeit in N verlaufen muss. Daher enthält N eine offene Teilmenge der x -Achse (die eine Integralkurve von X ist). Für hinreichend kleines x , enthält N aber auch eine offene Teilmenge der Gerade parallel zur y -Achse durch den Punkt $(x, 0, 0)$ (die eine Integralkurve von Y ist). Daher enthält N eine offene Teilmenge der (x, y) -Ebene. Die Tangentialebene der (x, y) -Ebene stimmt jedoch für kein p außerhalb der x -Achse mit D_p überein, ein Widerspruch.

Das letzte Beispiel zeigt, dass Integralmannigfaltigkeiten, im Gegensatz zu Integralkurven, nicht immer existieren müssen.

Definition. Es sei D eine glatte Distribution auf einer glatten Mannigfaltigkeit M . Wir nennen D *involutiv*, wenn für jedes Paar glatter lokaler Schnitte von D (also für jedes Paar glatter Vektorfelder X, Y definiert auf einer offenen Teilmenge von M mit $X_p, Y_p \in D_p$ für jedes p) ihre Lie Klammer $[X, Y]$ ebenfalls ein glatter lokaler Schnitt von D ist.

Bemerkung.

- (a) Es sei $D \subseteq TM$ eine glatte Distribution und $\Gamma(D) \subseteq \mathfrak{X}(M)$ bezeichne den Raum der glatten globalen Schnitte von D . Die Distribution D ist genau dann involutiv, wenn $\Gamma(D)$ eine Lie Unteralgebra von $\mathfrak{X}(M)$ ist.
- (b) Es genügt die Involutivitätsbedingung für glatte lokale Rahmen zu überprüfen. Genauer gilt:
Es sei $D \subseteq TM$ eine Distribution. Wenn es zu jedem Punkt aus M eine Umgebung gibt, auf der ein glatter Rahmen (X_1, \dots, X_k) für D existiert, sodass $[X_i, X_j]$ eine glatter Schnitt von D ist für alle $i, j = 1, \dots, k$, dann ist D involutiv.

Definition. Eine glatte Distribution D auf M heißt *integrierbar*, wenn jeder Punkt aus M in einer Integralmannigfaltigkeit von D enthalten ist.

Proposition 2.8 *Jede integrierbare Distribution ist involutiv.*

Beweis: Es sei D eine integrierbare Distribution und X, Y glatte lokale Schnitte von D , die auf einer offenen Menge $U \subseteq M$ definiert sind. Weiters sei $p \in U$ beliebig und N eine Integralmannigfaltigkeit von D , die p enthält. Da X und Y Schnitte von D sind, sind X und Y nach Definition tangential zu N . Nach [ANMA, Korollar 6.12] ist dann auch $[X, Y]$ tangential zu N und daher $[X, Y]_p \in D_p$. Da dies für jeden Punkt $p \in U$ gilt, ist D involutiv. ■

Beispiel

Die Distribution aus obigem Beispiel (c) ist nicht involutiv, da

$$[X, Y] = -\frac{\partial}{\partial z}$$

kein Schnitt von D ist.

Differentialformen ermöglichen es uns eine alternative Beschreibung involutiver Distributionen zu geben. Davor benötigen wir jedoch noch zwei Hilfsresultate.

Lemma 2.9 *Es sei M eine glatte n -Mannigfaltigkeit. Eine k -dimensionale Distribution $D \subseteq TM$ auf M ist genau dann glatt, wenn es zu jedem $p \in M$ eine Umgebung U gibt, auf der glatte 1-Formen $\omega^1, \dots, \omega^{n-k}$ existieren, sodass für alle $q \in U$,*

$$D_q = \ker \omega^1|_q \cap \dots \cap \ker \omega^{n-k}|_q. \quad (2.3)$$

Beweis: Seien zunächst $\omega^1, \dots, \omega^{n-k}$ 1-Formen in einer Umgebung eines beliebigen Punktes, die (2.3) erfüllen. Da D k -dimensional ist, müssen die Formen aus Dimensionsgründen auf U linear unabhängig sein und können daher zu einem glatten Korahmen $(\omega^1, \dots, \omega^n)$ auf einer (eventuell kleineren) Umgebung ergänzt werden. Bezeichnet (X_1, \dots, X_n) den dualen Rahmen, dann wird D offenbar von X_{n-k+1}, \dots, X_n aufgespannt und ist daher glatt nach obiger Bemerkung.

Umgekehrt sei nun D glatt. Dann gibt es in einer Umgebung von jedem $p \in M$ glatte Vektorfelder Y_1, \dots, Y_k die D aufspannen. Diese können wir zu einem glatten lokalen Rahmen (Y_1, \dots, Y_n) in einer Umgebung von p ergänzen. Bezeichnen wir den dualen Korahmen mit $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$, dann ist offenbar D lokal charakterisiert durch

$$D_q = \ker \varepsilon^{k+1}|_q \cap \dots \cap \ker \varepsilon^n|_q. \quad \blacksquare$$

Definition. Ist D eine glatte k -Distribution auf einer glatten n -Mannigfaltigkeit, so nennen wir $n - k$ linear unabhängige 1-Formen $\omega^1, \dots, \omega^{n-k}$ definiert auf einer offenen Menge $U \subseteq M$, die (2.3) erfüllen für jedes $q \in U$, *lokal definierende Formen für D* . Allgemeiner sagen wir, dass eine m -Form $\omega \in \Omega^m(M)$ mit $0 \leq m \leq n$ die Distribution D *annihiliert*, wenn $\omega(X_1, \dots, X_m) = 0$ für alle lokalen Schnitte X_1, \dots, X_m von D . (Ist $m = 0$, so annihiliert nur die Nullfunktion D .)

Lemma 2.10 *Es sei D eine glatte k -dimensionale Distribution auf einer glatten n -Mannigfaltigkeit M . Sind $\omega^1, \dots, \omega^{n-k}$ glatte lokal definierende Formen für D über einer offenen Menge $U \subseteq M$, dann annihiliert eine glatte m -Form η auf U genau dann D , wenn η in der Form*

$$\eta = \sum_{i=1}^{n-k} \omega^i \wedge \beta^i \quad (2.4)$$

für geeignete glatte $(m - 1)$ -Formen $\beta^1, \dots, \beta^{n-k}$ auf U , dargestellt werden kann.

Beweis: Offenbar annihiliert jede Form η die (2.4) in einer Umgebung eines Punktes erfüllt D . Wir nehmen daher an, dass η die Distribution D auf U annihiliert und weisen (2.4) nach. In einer Umgebung jedes Punktes von U können wir $(\omega^1, \dots, \omega^{n-k})$ zu einem glatten lokalen Korahmen ergänzen. Bezeichnet (X_1, \dots, X_n) wieder den dazu dualen Rahmen, dann wird D von X_{n-k+1}, \dots, X_n aufgespannt. In Bezug auf diesen Korahmen kann $\eta \in \Omega^m(M)$ lokal eindeutig in der Form

$$\eta = \sum_I' \eta_I \omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_m}$$

dargestellt werden, wobei $\eta_I = \eta(X_{i_1}, \dots, X_{i_m})$. Daher annihiliert η genau dann D auf U , wenn $\eta_I = 0$ für alle $n - k + 1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$. In diesem Fall kann aber η in der Form

$$\eta = \sum_{I: i_1 \leq n-k}' \eta_I \omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_m} = \sum_{i_1=1}^{n-k} \omega^{i_1} \wedge \left(\sum_{I'}' \eta_{i_1 I'} \omega^{i_2} \wedge \dots \wedge \omega^{i_m} \right),$$

geschrieben werden, wobei $I' = (i_2, \dots, i_m)$ bezeichnet. Dies gilt zunächst in einer Umgebung von jedem Punkt aus U . Durch Verwendung einer Zerlegung der Eins kann aber leicht eine analoge Darstellung auf ganz U erhalten werden. \blacksquare

Wir sind nun in der Lage eine Bedingung für Involutivität mit Hilfe der äußeren Ableitung zu formulieren. Dazu erinnern wir an eine nützliche Formel (siehe [ANMA, Korollar 9.24]) zur Berechnung der äußeren Ableitung einer 1-Form ω :

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M). \quad (2.5)$$

Satz 2.11 *Eine glatte Distribution $D \subseteq TM$ ist genau dann involutiv, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:*

Ist η eine glatte 1-Form die D auf einer offenen Menge $U \subseteq M$ annulliert, dann annulliert auch $d\eta$ die Distribution D auf U .

Beweis: Es sei zunächst D involutiv und η eine glatte 1-Form, die D auf einer offenen Menge $U \subseteq M$ annulliert. Dann folgt für beliebige glatte lokale Schnitte X, Y von D aus (2.5),

$$d\eta(X, Y) = X(\eta(Y)) - Y(\eta(X)) - \eta([X, Y]).$$

Da η aber D annulliert, verschwinden alle Ausdrücke auf der rechten Seite.

Es erfülle nun D umgekehrt die angegebene Bedingung und X, Y seien wieder glatte lokale Schnitte von D . Sind $\omega^1, \dots, \omega^{n-k}$ glatte lokal definierende Formen für D , dann folgt aus (2.5) für alle $i = 1, \dots, n - k$, die Gleichung

$$\omega^i([X, Y]) = X(\omega^i(Y)) - Y(\omega^i(X)) - d\omega^i(X, Y) = 0,$$

womit $[X, Y]$ Werte in D annimmt. Damit ist D involutiv. ■

Bemerkung.

- (a) Wie die Involutivitätsbedingung muss auch die Bedingung an die äußere Ableitung nur für spezielle glatte definierende Formen überprüft werden:

Es seien M eine glatte n -Mannigfaltigkeit, D eine glatte k -dimensionale Distribution auf M und $\omega^1, \dots, \omega^{n-k}$ glatte definierende Formen für D auf einer offenen Menge $U \subseteq M$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) D ist involutiv auf U .
- (ii) $d\omega^1, \dots, d\omega^{n-k}$ annullieren D .
- (iii) Es existieren glatte 1-Formen $\{\alpha_j^i : i, j = 1, \dots, n - k\}$, sodass für alle $i = 1, \dots, n - k$,

$$d\omega^i = \sum_{j=1}^{n-k} \omega^j \wedge \alpha_j^i.$$

In den bisher betrachteten Beispielen von Distributionen für die Integralmannigfaltigkeiten existieren, haben die assoziierten Untermannigfaltigkeiten „zusammengepasst“ wie parallele affine Unterräume des \mathbb{R}^n . Dies motiviert die folgende Begriffsbildung.

Definition. Ist $D \subseteq TM$ eine k -dimensionale Distribution, dann nennen wir eine glatte Karte (U, φ) für M *flach für D* , wenn $\varphi(U)$ ein Würfel im \mathbb{R}^n ist und an Punkten von U die Distribution D durch die ersten k Koordinatenvektorfelder $\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^k$ aufgespannt wird.

Bemerkung.

- (a) In jeder flachen Karte für D ist jeder Schnitt der Form $x^{k+1} = c^{k+1}, \dots, x^n = c^n$ für Konstanten c^{k+1}, \dots, c^n eine Integralmannigfaltigkeit von D .

Definition. Eine Distribution $D \subseteq TM$ heißt *vollständig integrierbar*, wenn jeder Punkt von M in einer flachen Karte für D enthalten ist.

Da offenbar jede vollständig integrierbare Distribution integrierbar ist, folgt aus Proposition 2.8:

$$\text{vollständig integrierbar} \Rightarrow \text{integrierbar} \Rightarrow \text{involutiv.}$$

Der Hauptsatz dieses Abschnitts – der Satz von Frobenius – besagt, dass die obigen Implikationen tatsächlich Äquivalenzen darstellen:

$$\text{vollständig integrierbar} \Leftrightarrow \text{integrierbar} \Leftrightarrow \text{involutiv.}$$

Zum Beweis dieses Resultats benötigen wir die kanonische Form kommutierender Vektorfelder.

Definition. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Wir sagen X und Y *kommutieren*, wenn $[X, Y] = 0$.

Ist θ ein glatter Fluss auf M , so heißt ein Vektorfeld $Z \in \mathfrak{X}(M)$ *invariant unter θ* , wenn Z θ_t -verwandt mit sich selbst ist für alle t , d.h. $d(\theta_t)_p(Z_p) = Z_{\theta_t(p)}$ für alle (t, p) im Definitionsbereich von θ .

Wie der folgende Satz zeigt, sind diese beiden Konzepte eng miteinander verwandt.

Satz 2.12 *Sind X und Y glatte Vektorfelder auf einer glatten Mannigfaltigkeit M , so sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (a) X und Y kommutieren.
- (b) Y ist invariant unter dem von X erzeugten Fluss.
- (c) X ist invariant unter dem von Y erzeugten Fluss.

Beweis: Es seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und θ der von X erzeugte Fluss. Angenommen es gilt (b). Dann ist $Y_{\theta_t(p)} = d(\theta_t)_p(Y_p)$ für alle (t, p) im Definitionsbereich von θ . Da θ_t ein Diffeomorphismus mit der Inversen θ_{-t} ist (siehe [ANMA, Satz 8.7]), erhalten wir durch Anwendung von $d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}$ auf beide Seiten

$$d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)} Y_{\theta_t(p)} = Y_p.$$

Aus der Definition der Lie Ableitung (siehe, zum Beispiel, [ANMA, Seite 98]) und [ANMA, Satz 8.17] folgt damit $[X, Y] = \mathcal{L}_X Y = 0$, also (a). Ganz analog zeigt man, dass (c) die Aussage (a) impliziert.

Um zu zeigen, dass (b) aus (a) folgt, nehmen wir $[X, Y] = \mathcal{L}_X Y = 0$ an. Es sei $p \in M$ beliebig und $\mathcal{D}^{(p)} \subseteq \mathbb{R}$ der Definitionsbereich der Integralkurve $\theta^{(p)}$. Wir betrachten die Abbildung

$$\gamma : \mathcal{D}^{(p)} \rightarrow T_p M, \quad \gamma(t) = d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)} Y_{\theta_t(p)}.$$

Aus dem Beweis von [ANMA, Lemma 8.16] folgt, dass γ eine glatte Kurve im Vektorraum $T_p M$ ist. Durch die Variablensubstitution $t = t_0 + s$ erhalten wir

$$\gamma'(t_0) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \gamma(t_0 + s) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} d(\theta_{-t_0-s}) Y_{\theta_{s+t_0}(p)} = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} d(\theta_{-t_0}) \circ d(\theta_{-s})(Y_{\theta_s(\theta_{t_0}(p))}).$$

Da die lineare Abbildung $d(\theta_{-t_0}) : T_{\theta_{t_0}(p)} M \rightarrow T_p M$ unabhängig von s ist, folgt weiters aus der Definition der Lie Ableitung

$$\gamma'(t_0) = d(\theta_{-t_0}) \left(\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} d(\theta_{-s})(Y_{\theta_s(\theta_{t_0}(p))}) \right) = d(\theta_{-t_0}) ((\mathcal{L}_X Y)_{\theta_{t_0}(p)}) = 0.$$

Es ist also $\gamma'(t) \equiv 0$. Da $\gamma(0) = Y_p$, folgt $\gamma(t) = Y_p$ für alle $t \in \mathcal{D}^{(p)}$. Anwendung von $d(\theta_t)_p$ auf beide Seiten ergibt $Y_{\theta_t(p)} = d(\theta_t)_p(Y_p)$, womit Y invariant ist unter dem Fluss θ . Wieder zeigt man analog, dass (a) auch (c) impliziert. ■

Aus dem Umstand, dass $[X, X] = 0$ für jedes glatte Vektorfeld, erhalten wir das folgende Korollar.

Korollar 2.13 *Jedes glatte Vektorfeld ist invariant unter seinem eigenen Fluss.*

Kommutierende Vektorfelder erzeugen auch kommutierende Flüsse. Da diese aber nicht global definiert sein müssen, ist etwas Sorgfalt bei der Definition dieser Begriffsbildung notwendig.

Definition. Sind θ und ψ glatte Flüsse auf eine glatten Mannigfaltigkeiten M , so sagen wir θ und ψ *kommutieren*, wenn die folgende Bedingung für alle $p \in M$ erfüllt ist: Sind J und K offene Intervalle, die Null enthalten, und sodass einer der Ausdrücke $\theta_t \circ \psi_s(p)$ oder $\psi_s \circ \theta_t(p)$ definiert ist für alle $(s, t) \in J \times K$, dann sind beide Ausdrücke definiert und stimmen überein.

Bemerkung.

(a) Globale Flüsse θ und ψ kommutieren, wenn $\theta_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \theta_t$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$.

Das folgende Resultat stellt die wichtigste Charakterisierung kommutierender Vektorfelder in Bezug auf die von ihnen erzeugten Flüsse dar.

Satz 2.14 *Glatte Vektorfelder kommutieren genau dann, wenn die von ihnen erzeugten Flüsse kommutieren.*

Beweis: Es seien X und Y glatte Vektorfelder auf einer glatten Mannigfaltigkeit M und θ und ψ , die von ihnen erzeugten Flüsse. Nehmen wir zunächst an, dass X und Y kommutieren. Es sei $p \in M$ und J und K offene Intervalle, die Null enthalten und sodass $\psi_s \circ \theta_t(p)$ für alle $(s, t) \in J \times K$ definiert ist. (Ist $\theta_t \circ \psi_s(p)$ definiert, so vertausche man in folgenden Argumenten einfach X und Y .) Nach Satz 2.12 ist X invariant unter ψ . Für festes $s \in J$, definieren wir die Kurve

$$\gamma : K \rightarrow M, \quad \gamma(t) = \psi_s \circ \theta_t(p) = \psi_s(\theta^{(p)}(t)).$$

Dann gilt $\gamma(0) = \psi_s(p)$ und für $t \in K$ ist

$$\gamma'(t) = \frac{d}{dt} \psi_s(\theta^{(p)}(t)) = d(\psi_s)(\theta^{(p)'}(t)) = d(\psi_s)(X_{\theta^{(p)}(t)}) = X_{\gamma(t)}.$$

Damit ist γ eine Integralkurve von X mit Startpunkt $\psi_s(p)$. Aus der Eindeutigkeit maximaler Integralkurven (siehe [ANMA, Satz 8.7]) folgt

$$\gamma(t) = \theta^{\psi_s(p)}(t) = \theta_t(\psi_s(p)),$$

womit θ und ψ kommutieren.

Nehmen wir nun umgekehrt an, dass θ und ψ kommutieren. Es sei wieder $p \in M$ und $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass $\psi_s \circ \theta_t(p)$ definiert ist, wann immer $|s| < \varepsilon$ und $|t| < \varepsilon$. Dann folgt $\psi_s \circ \theta_t(p) = \theta_t \circ \psi_s(p)$ für alle solchen s und t oder anders ausgedrückt

$$\psi^{\theta_t(p)}(s) = \theta_t(\psi^p(s)).$$

Differentiation dieser Gleichung in Bezug auf s ergibt

$$Y_{\theta_t(p)} = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \psi^{\theta_t(p)}(s) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \theta_t(\psi^p(s)) = d(\theta_t)_p(Y_p).$$

Anwendung von $d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}$ auf beide Seiten liefert nun

$$d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(Y_{\theta_t(p)}) = Y_p.$$

Differenzieren wir diese Gleichung nun nach t und verwenden die Definition der Lie Ableitung, so erhalten wir $0 = (\mathcal{L}_X Y)_p = [X, Y]_p$. \blacksquare

Nach diesen Vorbereitungen sind wir nun in der Lage, die angekündigte kanonische Form kommutierender Vektorfelder zu beweisen.

Satz 2.15 *Es seien M eine glatte n -Mannigfaltigkeit und (X_1, \dots, X_k) linear unabhängige paarweise kommutierende glatte Vektorfelder auf einer offenen Menge $W \subseteq M$. Dann gibt es zu jedem $p \in W$ glatte in p zentrierte Karten $(U, (s^i))$, sodass $X_i = \partial/\partial s^i$ für alle $i = 1, \dots, k$.*

Beweis: Es seien $p \in W$ beliebig und S eine eingebettete Untermannigfaltigkeit der Kodimension k , deren Tangentialraum an p komplementär zu $\text{span}\{X_1|_p, \dots, X_k|_p\}$ ist. Es sei $(U, (x^i))$ eine Schnittkarte für S mit Zentrum in p , $U \subseteq W$ und so, dass $S \cap U = \{x \in U : x^1 = \dots = x^k = 0\}$. Nach Voraussetzung ist dann

$$\text{span}\{X_1|_p, \dots, X_k|_p, \partial/\partial x^{k+1}|_p, \dots, \partial/\partial x^n|_p\} = T_p M.$$

Da die zu zeigende Behauptung eine lokale Aussage ist, können wir X_1, \dots, X_k auch als Vektorfelder auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und S als die Teilmenge von U ansehen, auf der die ersten k Koordinaten verschwinden.

Es sei θ_i der von X_i erzeugte Fluss. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Umgebung V von p in U , sodass $(\theta_1)_{t_1} \circ \dots \circ (\theta_k)_{t_k}$ auf V definiert und V in U abbildet wann immer $|t_1|, \dots, |t_k| < \varepsilon$. Um das zu sehen, wähle $\varepsilon_k > 0$ und $U_k \subseteq U$ so, dass θ_k die Menge $(-\varepsilon_k, \varepsilon_k) \times U_k$ nach U abbildet und wähle dann induktiv ε_i und U_i so, dass θ_i die Menge $(\varepsilon_i, \varepsilon_i) \times U_i$ nach U_{i+1} abbildet. Setzen wir schließlich $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i\}$ und $V = U_1$ so folgt die Behauptung.

Als nächstes definiere die Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ durch

$$\Omega = \{(s^{k+1}, \dots, s^n) \in \mathbb{R}^{n-k} : (0, \dots, 0, s^{k+1}, \dots, s^n) \in V\}$$

und die Abbildung $\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon)^k \times \Omega \rightarrow U$ durch

$$\Phi(s^1, \dots, s^k, s^{k+1}, \dots, s^n) = (\theta_1)_{s^1} \circ \dots \circ (\theta_k)_{s^k}(0, \dots, 0, s^{k+1}, \dots, s^n).$$

Nach Konstruktion ist dann $\Phi(\{0\} \times \Omega) = S \cap V$. Wir wollen nun zeigen, dass $\partial/\partial s^i$ für alle $i = 1, \dots, k$ Φ -verwandt ist mit X_i . Da nach Satz 2.14 die Flüsse θ_i kommutieren, gilt für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ und jedes $s_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)^k \times \Omega$,

$$\begin{aligned} d\Phi_{s_0} \left(\frac{\partial}{\partial s^i} \Big|_{s_0} \right) f &= \frac{\partial}{\partial s^i} \Big|_{s_0} f(\Phi(s^1, \dots, s^n)) \\ &= \frac{\partial}{\partial s^i} \Big|_{s_0} f((\theta_1)_{s^1} \circ \dots \circ (\theta_k)_{s^k}(0, \dots, 0, s^{k+1}, \dots, s^n)) \\ &= \frac{\partial}{\partial s^i} \Big|_{s_0} f((\theta_i)_{s^i} \circ (\theta_1)_{s^1} \circ \dots \circ (\theta_{i-1})_{s^{i-1}} \circ (\theta_{i+1})_{s^{i+1}} \\ &\quad \circ \dots \circ (\theta_k)_{s^k}(0, \dots, 0, s^{k+1}, \dots, s^n)). \end{aligned}$$

Für jedes $q \in M$ ist $t \mapsto (\theta_i)_t(q)$ eine Integralkurve von X_i . Daher stimmt der letzte Ausdruck mit $X_i|_{\Phi(s_0)} f$ überein, womit die Behauptung bewiesen ist.

Als nächstes zeigen wir, dass $d\Phi_0$ invertierbar ist. Nach obiger Rechnung gilt

$$d\Phi_0 \left(\frac{\partial}{\partial s^i} \Big|_0 \right) = X_i|_p, \quad i = 1, \dots, k.$$

Da $\Phi(0, \dots, 0, s^{k+1}, \dots, s^n) = (0, \dots, 0, s^{k+1}, \dots, s^n)$, folgt andererseits

$$d\Phi_0 \left(\frac{\partial}{\partial s^i} \Big|_0 \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \quad i = k+1, \dots, n.$$

Damit bildet das Differential $d\Phi_0$ die Basis $(\partial/\partial s^1|_0, \dots, \partial/\partial s^n|_0)$ von $T_0\mathbb{R}^n$ auf die Basis $(X_1|_p, \dots, X_k|_p, \partial/\partial x^{k+1}|_p, \dots, \partial/\partial x^n|_p)$ von T_pM ab. Nach dem Satz von der Umkehrabbildung [ANMA, Satz 4.6] ist Φ daher ein Diffeomorphismus in einer Umgebung von 0 und $\varphi = \Phi^{-1}$ ist eine Koordinatenabbildung die $\partial/\partial s^i$ auf X_i abbildet für $i = 1, \dots, k$. ■

Satz 2.15 ist das entscheidende Hilfsmittel zum Beweis des Satzes von Frobenius.

Satz von Frobenius. *Jede involutive Distribution ist vollständig integrierbar.*

Beweis: Jede glatte Distribution D , die lokal von linear unabhängigen, glatten kommutierenden Vektorfeldern aufgespannt wird, ist vollständig integrierbar, da die Koordinaten aus Satz 2.15 für kommutierende Vektorfelder eine flache Karte für D liefern. Daher reicht es zu zeigen, dass jede involutive Distribution lokal von solchen Vektorfeldern aufgespannt wird.

Es sei D eine k -dimensionale involutive Distribution auf einer n -Mannigfaltigkeit M und $p \in M$ beliebig. Da vollständige Integrierbarkeit eine lokale Eigenschaft ist, können wir M durch eine Koordinatenumgebung U von p ersetzen und einen glatten lokalen Rahmen X_1, \dots, X_k wählen, der D erzeugt. Nach eventuellem Umordnen der Koordinaten können wir weiters annehmen, dass D_p komplementär zum Unterraum von $T_p\mathbb{R}^n$ ist, der von $(\partial/\partial x^{k+1}|_p, \dots, \partial/\partial x^n|_p)$ aufgespannt wird.

Es sei $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ die Projektion auf die ersten k Koordinaten:

$$\pi(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^k).$$

Das globale Differential von π , also die glatte Abbildung $d\pi : T\mathbb{R}^n \rightarrow T\mathbb{R}^k$, kann in der Form

$$d\pi \left(\sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_q \right) = \sum_{i=1}^k v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\pi(q)}$$

geschrieben werden. Da $d\pi|_D$ die Zusammensetzung der Inklusionsabbildung $D \hookrightarrow TU$ und $d\pi$ ist, ist $d\pi|_D$ glatt. Die Matrix-Einträge von $d\pi|_{D_q}$ in Bezug auf $(X_i|_q)$ und $(\partial/\partial x^j|_{\pi(q)})$ sind daher glatte Funktionen in q .

Nach unserer Koordinatenwahl ist $D_p \subseteq T_p\mathbb{R}^n$ komplementär zum Kern von $d\pi_p$ und daher die Einschränkung von $d\pi_p$ auf D_p bijektiv. Aufgrund der Stetigkeit von $d\pi|_D$, gilt dies auch für $d\pi|_{D_q}$ für alle q in einer Umgebung von p und die Matrix-Einträge von $(d\pi|_{D_q})^{-1} : T_{\pi(q)}\mathbb{R}^k \rightarrow D_q$ sind ebenfalls glatte Funktionen in q . Mit deren Hilfe definieren wir einen neuen lokalen glatten Rahmen V_1, \dots, V_k für D in einer Umgebung von p durch

$$V_i|_q = (d\pi|_{D_q})^{-1} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\pi(q)}.$$

Es bleibt zu zeigen, dass $[V_i, V_j] = 0$ für alle i, j . Dazu beachte zunächst, dass V_i und $\partial/\partial x^i$ π -verwandt sind, da nach Definition der V_i gilt

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\pi(q)} = (d\pi|_{D_q})V_i|_q = d\pi_q(V_i|_q).$$

Aufgrund der Verträglichkeit der Lie Klammer mit Pushforwards erhalten wir

$$d\pi_q([V_i, V_j]_q) = \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right]_{\pi(q)} = 0.$$

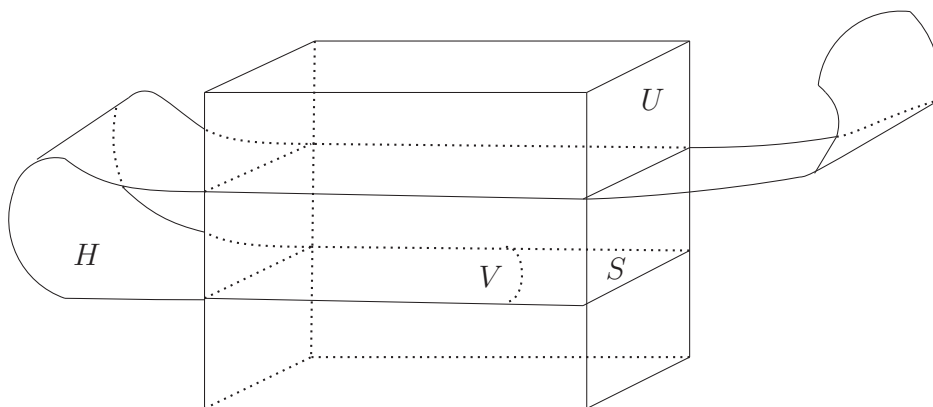
Da D involutiv ist, nimmt $[V_i, V_j]$ nur Werte in D an. Die Injektivität von $d\pi$ auf jeder Faser von D impliziert daher $[V_i, V_j]_q = 0$ für alle q . \blacksquare

Eine der wichtigsten Konsequenzen des Satzes von Frobenis enthält das folgende Korollar.

Korollar 2.16 *Es sei D eine involutive k -dimensionale Distribution auf einer glatten Mannigfaltigkeit M und $(U, (x^i))$ sei eine flache Karte für D . Ist H eine Integralmannigfaltigkeit von D , dann ist $H \cap U$ eine Vereinigung von höchstens abzählbar vielen disjunkten offenen Teilmengen von parallelen k -dimensionalen Schnitten von U , von denen jede offen in H und eingebettet in M ist.*

Beweis: Da die Inklusionsabbildung $\iota : H \hookrightarrow M$ stetig ist, ist $\iota^{-1}(U) = H \cap U$ offen in H und besteht daher aus der Vereinigung von höchstens abzählbar vielen disjunkten Zusammenhangskomponenten, von denen jede offen in H ist.

Es sei V eine beliebige Zusammenhangskomponente von $H \cap U$. Wir zeigen zunächst, dass V in einem einzigen Schnitt enthalten ist. Da dx^{k+1}, \dots, dx^n lokal definierende Formen für D sind, folgt, dass der Pullback dieser 1-Formen auf V verschwindet. Da V zusammenhängend ist, müssen die Koordinaten x^{k+1}, \dots, x^n konstant auf V sein, womit V in einem einzigen Schnitt S enthalten ist.



Da S eingebettet ist in M , ist die Inklusionsabbildung $V \hookrightarrow M$ glatt als Abbildung nach S nach [ANMA, Korollar 5.16]. Die Inklusionsabbildung $V \hookrightarrow S$ ist daher eine injektive glatte Immersion zwischen Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension und daher ein lokaler Diffeomorphismus, offen und ein Homöomorphismus auf eine offene Teilmenge von S . Die Inklusionsabbildung $V \hookrightarrow M$ ist daher als Zusammensetzung der glatten Einbettungen $V \hookrightarrow S \hookrightarrow M$ eine glatte Einbettung. ■

Definition. Eine immersierte Untermannigfaltigkeit $H \subseteq M$ heißt *schwach eingebettet* in M , wenn jede glatte Abbildung $F : N \rightarrow M$ deren Bild in H enthalten ist, auch glatt als Abbildung von N nach H ist.

Für unser Studium von Lie Untergruppen ist das folgende Resultat wichtig.

Satz 2.17 *Jede Integralmannigfaltigkeit einer involutiven Distribution ist schwach eingebettet.*

Beweis: Es sei M eine glatte n -Mannigfaltigkeit und $H \subseteq M$ eine Integralmannigfaltigkeit einer involutiven k -dimensionalen Distribution D auf M . Weiters sei $F : N \rightarrow M$ eine glatte Abbildung mit $F(N) \subseteq H$. Es sei $p \in N$ beliebig und $q = F(p) \in H$. Es seien (y^1, \dots, y^n) flache Koordinaten für D in einer Umgebung U von q und (x^i) glatte Koordinaten für N auf einer zusammenhängenden Umgebung B von p , sodass $F(B) \subseteq U$. Schreiben wir die Koordinatendarstellung von F in der Form

$$(y^1, \dots, y^n) = (F^1(x), \dots, F^n(x)),$$

dann folgt aus $F(B) \subseteq H \cap U$ und Korollar 2.16, dass die Koordinatenfunktionen F^{k+1}, \dots, F^n nur höchstens abzählbar viele Werte annehmen können. Da B zusammenhängend ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass diese Koordinatenfunktionen konstant sein müssen und daher $F(B)$ in einem einzigen Schnitt $S \subseteq U$ enthalten ist. Da $S \cap H$ eine offene Teilmenge von H ist, die in M eingebettet ist, folgt, dass $F|_B$ glatt ist von B nach $S \cap H$ und daher $F|_B : B \rightarrow (S \cap H) \hookrightarrow H$ als Zusammensetzung glatter Abbildungen ebenfalls glatt ist. ■

Wir wollen nun die maximalen Integralmannigfaltigkeiten einer involutiven k -Distribution zu einer Partition von M in Untermannigfaltigkeiten zusammenfassen, die lokal „zusammenpassen“ wie die Schnitte einer flachen Karte. Dazu präzisieren wir zunächst, was wir mit „zusammenpassen“ meinen.

Definition. Es sei M eine glatte n -Mannigfaltigkeit und \mathfrak{F} eine Familie von k -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten von M . Eine glatte Karte (U, φ) von M nennen wir *flach für \mathfrak{F}* , wenn $\varphi(U)$ ein Würfel im \mathbb{R}^n ist und jede Untermannigfaltigkeit aus \mathfrak{F} mit U entweder leeren Schnitt hat oder eine höchstens abzählbare Vereinigung von k -dimensionalen Schnitten der Form $x^{k+1} = c^{k+1}, \dots, x^n = c^n$ ist.

Eine *Blätterung der Dimension k von M* ist eine Familie \mathfrak{F} von disjunkten, nicht leeren, zusammenhängenden, immersierten k -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten von M , genannt die *Blätter* der Blätterung, deren Vereinigung ganz M ist und, sodass es in einer Umgebung von jedem $p \in M$ eine flache Karte für \mathfrak{F} gibt.

Beispiele.

- (a) Die Familie aller k -dimensionalen affinen Unterräume des \mathbb{R}^n parallel zum $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ bildet eine k -dimensionale Blätterung des \mathbb{R}^n .
- (b) Die Familie aller Sphären mit Zentrum in 0 bildet eine $(n - 1)$ -dimensionale Blätterung von $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- (c) Sind M und N zusammenhängende glatte Mannigfaltigkeiten, dann bildet die Familie der Teilmengen der Form $M \times \{q\}$ mit $q \in N$ eine Blätterung von $M \times N$. Jedes Blatt ist dabei diffeomorph zu M .
Zum Beispiel bilden alle Kreise der Form $\mathbb{S}^1 \times \{q\} \subseteq \mathbb{T}^2$ mit $q \in \mathbb{S}^1$ eine Blätterung des Torus \mathbb{T}^2 .
- (d) Ist α eine feste reelle Zahl, dann bilden die Bilder der aller Kurven

$$\gamma_\theta(t) = (e^{it}, e^{i(\alpha t + \theta)}),$$

wobei θ ganz \mathbb{R} durchläuft, eine 1-dimensionale Blätterung des Torus \mathbb{T}^2 . Ist α rational, dann ist jedes Blatt ein eingebetteter Kreis; ist α irrational, dann ist jedes Blatt dicht.

Das Hauptergebnis zu Blätterungen ist, dass diese in einem Eins-zu-Eins-Zusammenhang mit involutiven Distributionen stehen. Eine Richtung dieser Aussage ist eine direkte Konsequenz der Definition und wir notieren sie in folgender Proposition:

Proposition 2.18 *Ist \mathfrak{F} eine Blätterung auf einer glatten Mannigfaltigkeit M , dann bildet die Familie der Tangentialräume an die Blätter von \mathfrak{F} eine involutive Distribution auf M .*

Mit Hilfe des Satzes von Frobenius, können wir folgende Umkehrung beweisen, die viel tiefliegender ist und als *Globaler Satz von Frobenius* bekannt ist:

Satz 2.19 *Sei D eine involutive Distribution auf einer glatten Mannigfaltigkeit M . Die Vereinigung aller maximalen zusammenhängenden Integralmannigfaltigkeiten von D bildet eine Blätterung von M .*

Satz 2.19 wird eine einfache Folgerung aus dem nächsten Lemma sein.

Lemma 2.20 *Ist $D \subseteq TM$ eine involutive Distribution und $\{N_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Familie von zusammenhängenden Integralmannigfaltigkeiten von D , die einen gemeinsamen Punkt haben, dann kann $N = \bigcup_\alpha N_\alpha$ mit einer eindeutig bestimmten Topologie und glatten Struktur versehen werden, die N zu einer zusammenhängenden Integralmannigfaltigkeit von D machen.*

Beweis: Da Integralmannigfaltigkeiten schwach eingebettet sind, ist nicht schwer zu zeigen, dass die Eindeutigkeit automatisch folgt. Es genügt daher nachzuweisen, dass N mit einer Topologie und glatten Struktur versehen werden kann, die es zu einer Integralmannigfaltigkeit von D machen.

Zur Konstruktion der Topologie zeigen wir zunächst, dass $N_\alpha \cap N_\beta$ offen in N_α und N_β ist für alle $\alpha, \beta \in A$. Dazu wählen wir eine flache Karte für D in einer Umgebung W eines beliebigen Punktes $q \in N_\alpha \cap N_\beta$. Es seien V_α und V_β die Zusammenhangskomponenten von $N_\alpha \cap W$ und $N_\beta \cap W$, die q enthalten. Nach Korollar 2.16 sind V_α und V_β offene Teilmengen einzelner Schnitte versehen mit der Spurtopologie und da beide q enthalten, müssen sie im selben Schnitt liegen. Damit ist $V_\alpha \cap V_\beta$ offen in S und daher auch N_α und N_β . Daher hat q eine Umgebung in N_α und in N_β , die in $N_\alpha \cap N_\beta$ enthalten ist.

Wir definieren nun eine Topologie auf N indem wir eine Menge $U \subseteq N$ offen nennen, wenn $U \cap N_\alpha$ offen ist in N_α für alle $\alpha \in A$. Nach dem bisher Gezeigten folgt leicht, dass dies eine Topologie auf N definiert in der jede der Mengen N_α offen ist. Versehen mit dieser Topologie ist N lokal Euklidisch von der Dimension k , da jedes $q \in N$ eine Koordinatenumgebung V in einem geeigneten N_α besitzt und V offen in N ist, da N_α offen in N ist. Darüberhinaus ist die Inklusionsabbildung $N \hookrightarrow M$ stetig, denn für jede offene Teilmenge $U \subseteq M$ ist $U \cap N$ offen in N , da $U \cap N_\alpha$ offen in N_α ist für jedes α .

Um zu zeigen, dass N Hausdorff ist, seien q und q' verschiedene Punkte in N . Dann gibt es disjunkte offene Teilmengen $U, U' \subseteq M$ die q und q' enthalten. Da die Inklusionsabbildung $N \hookrightarrow M$ stetig ist, sind aber auch $N \cap U$ und $N \cap U'$ disjunkte offene Teilmengen von N die q und q' enthalten.

Als nächstes weisen wir das zweite Abzählbarkeitsaxiom für N nach. Dazu überdecken wir M zunächst mit abzählbar vielen flachen Karten $\{W_i\}$ für D . Es genügt im Folgenden zu zeigen, dass $N \cap W_i$ für jedes i in einer abzählbaren Vereinigung von Schnitten enthalten ist, da jede offene Teilmenge eines einzelnen Schnittes das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, womit N als Vereinigung von abzählbar vielen Mengen geschrieben werden kann, von denen jede das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt und offen ist in N .

Es sei p_0 ein Punkt in N_α für alle α (so ein Punkt existiert nach Voraussetzung). Wir sagen ein Schnitt S einer Menge W_k ist erreichbar von p_0 , wenn es eine endliche Folge von Indizes i_1, \dots, i_m und für jeden Index i_j einen Schnitt $S_{i_j} \subseteq W_{i_j}$ gibt mit der Eigenschaft, dass $p_0 \in S_{i_1}$, $S_{i_m} = S$ und $S_{i_j} \cap S_{i_{j+1}} \neq \emptyset$ für jedes $j = 1, \dots, m-1$.

Es sei W_k eine der Mengen aus der abzählbaren Überdeckung mit flachen Karten und $S \subseteq W_k$ sei ein Schnitt, der ein $q \in N$ enthält. Dann ist q in einer der Integralmannigfaltigkeiten N_α enthalten. Da auch $p_0 \in N_\alpha$, gibt es einen stetigen Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow N_\alpha$ der p_0 und q verbindet. Da $\gamma([0, 1])$ kompakt ist, gibt es endlich viele Zahlen $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$, sodass für jedes $j = 1, \dots, m$ die Menge $\gamma([t_{j-1}, t_j])$ in einer der flachen Karten W_{i_j} enthalten ist. Da die Menge $\gamma([t_{j-1}, t_j])$ zusammenhängend ist, ist sie in einer einzelnen Zusammenhangskomponente von $W_{i_j} \cap N_\alpha$ enthalten und damit in einem einzelnen Schnitt $S_{i_j} \subseteq W_{i_j}$. Für jedes $j = 1, \dots, m - 1$ haben die Schnitte S_{i_j} und $S_{i_{j+1}}$ den Punkt $\gamma(t_j)$ gemeinsam, damit ist der Schnitt S von p_0 aus erreichbar.

Wir haben gezeigt, dass jeder Schnitt einer der Mengen W_k , der einen Punkt aus N enthält, von p_0 aus erreichbar ist. Da jedes S_{i_j} für sich eine Integralmannigfaltigkeit ist, schneidet S_{i_j} höchstens abzählbar viele Schnitte von $W_{i_{j+1}}$ nach Korollar 2.16. Damit sind aber höchstens abzählbar viele Schnitte von p_0 aus erreichbar, womit das zweite Abzählbarkeitsaxiom für N erfüllt ist.

Die Menge N ist also eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension k , die als Vereinigung zusammenhängender Untermannigfaltigkeiten, die einen Punkt gemeinsam haben, selbst zusammenhängend ist. Zur Konstruktion einer glatten Struktur auf N , definieren wir einen Atlas bestehend aus allen Karten der Form $(S \cap N, \psi)$, wobei S ein einzelner Schnitt einer flachen Karte ist und $\psi : S \rightarrow \mathbb{R}^k$ die Abbildung ist, deren Koordinatendarstellung in der flachen Karte durch die Projektion auf die ersten k Koordinaten gegeben ist:

$$\psi(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^k).$$

Da jeder Schnitt als eingebettete Untermannigfaltigkeit eine eindeutige glatte Struktur trägt, sind die Koordinatenwechsel $\psi' \circ \psi^{-1}$ zwischen sich schneidenden Schnitten S, S' glatt. In Bezug auf diese glatte Struktur ist die Inklusionsabbildung $N \hookrightarrow M$ eine glatte Immersion (da sie eine glatte Einbettung auf jedem Schnitt ist) und der Tangentialraum an N bei $q \in N$ ist gerade D_q (da dies für Schnitte gilt). ■

Beweis von Satz 2.19: Für $p \in M$ sei L_p die Vereinigung aller zusammenhängenden Integralmannigfaltigkeiten von D , die p enthalten. Nach Lemma 2.20 ist L_p eine zusammenhängende Integralmannigfaltigkeit von D die p enthält und offenbar maximal. Wenn sich zwei solcher maximalen Integralmannigfaltigkeiten L_p und $L_{p'}$ schneiden, dann ist ihre Vereinigung $L_p \cup L_{p'}$ eine Integralmannigfaltigkeit, die sowohl p als auch p' enthält, womit aufgrund der Maximalität $L_p = L_{p'}$ folgt. Damit sind die verschiedenen maximalen zusammenhängenden Integralmannigfaltigkeiten entweder disjunkt oder identisch.

Ist (U, φ) eine flache Karte für D , dann ist $L_p \cap U$ eine abzählbare Vereinigung offener Teilmengen von Schnitten nach Korollar 2.16. Ist für jeden solchen Schnitt S der Durchschnitt $L_p \cap S$ weder leer noch ganz S , dann ist $L_p \cup S$ eine zusammenhängende Integralmannigfaltigkeit die L_p enthält, im Widerspruch zur Maximalität von L_p . Daher ist $L_p \cap U$ eine abzählbare Vereinigung von Schnitten, womit die Familie $\{L_p : p \in M\}$ die gesuchte Blätterung ist. ■

Wir wenden uns nun (endlich) wieder Lie Gruppen zu.

Definition. Eine Distribution D auf einer Lie Gruppe G heißt linksinvariant, wenn $d(L_g)D = D$ für alle $g \in G$ (wenn also $d(L_g)_{g'}D_{g'} = D_{gg'}$ für alle $g, g' \in G$).

Unsere ersten beiden Anwendungen von Blätterungen in der Lie Gruppen Theorie basieren auf der folgenden einfachen Beziehung zwischen Lie Unteralgebren und Distributionen.

Lemma 2.21 *Es sei G eine Lie Gruppe. Ist \mathfrak{h} eine Lie Unteralgebra von $\text{Lie}(G)$, dann ist die Teilmenge $D = \bigcup_{g \in G} D_g \subseteq TG$, wobei*

$$D_g = \{X_g : X \in \mathfrak{h}\} \subseteq T_g G,$$

eine linksinvariante involutive Distribution auf G .

Beweis: Jedes $X \in \mathfrak{h}$ ist ein linksinvariantes Vektorfeld auf G . Daher ist für beliebige $g, g' \in G$ die Einschränkung von $d(L_{g'g^{-1}})$ auf D_g ein Isomorphismus nach $D_{g'}$. Damit hat D_g dieselbe Dimension für jedes $g \in G$ und offenbar ist D linksinvariant. Jede Basis (X_1, \dots, X_k) von \mathfrak{h} ist ein globaler glatter Rahmen für D , womit D glatt ist. Da auch $[X_i, X_j] \in \mathfrak{h}$ für alle $i, j \in \{1, \dots, k\}$ folgt aus Bemerkung (b) auf Seite 31, dass D involutiv ist. ■

Mit Hilfe von Lemma 2.21 können wir nun etwa zeigen, dass jede Lie Untergruppe schwach eingebettet ist.

Satz 2.22 *Jede Lie Untergruppe ist eine Integralmannigfaltigkeit einer involutiven Distribution und daher eine schwach eingebettete Untermannigfaltigkeit.*

Beweis: Es sei G eine Lie Gruppe und $H \subseteq G$ eine Lie Untergruppe. Satz 2.7 zeigt, dass die Lie Algebra von H kanonisch isomorph ist zur Lie Unteralgebra $\mathfrak{h} = \iota_*(\text{Lie}(H)) \subseteq \text{Lie}(G)$, wobei $\iota : H \hookrightarrow G$ die Inklusionsabbildung ist. Es sei $D \subseteq TG$ die nach Lemma 2.21 durch \mathfrak{h} bestimmte involutive Distribution. Nach Definition ist dann an jedem $h \in H$ der Tangentialraum $T_h H$ gleich D_h , womit H eine Integralmannigfaltigkeit für D ist. Nach Satz 2.17 ist daher H schwach eingebettet. ■

Schließlich sind wir nun auch in der Lage zu beweisen, dass es zu jeder Lie Unteralgebra \mathfrak{h} der Lie Algebra einer Lie Gruppe G eine Lie Untergruppe von G gibt, deren Lie Algebra gerade \mathfrak{h} ist.

Satz 2.23 *Es sei G eine Lie Gruppe mit Lie Algebra \mathfrak{g} . Ist \mathfrak{h} eine Lie Unteralgebra von \mathfrak{g} , dann gibt es eine eindeutige zusammenhängende Lie Untergruppe von G , deren Lie Algebra \mathfrak{h} ist.*

Beweis: Angenommen \mathfrak{h} ist eine Lie Unteralgebra von \mathfrak{g} . Es sei $D \subseteq TG$ die nach Lemma 2.21 durch \mathfrak{h} bestimmte involutive Distribution und \mathcal{H} die durch D bestimmte Blätterung. Weiters bezeichne \mathcal{H}_g für jedes $g \in G$ das Blatt von \mathcal{H} , welches g enthält. Da D links-invariant ist, folgt, dass für jede zusammenhängende Integralmannigfaltigkeit E von D , auch $L_g(E)$ eine zusammenhängende Integralmannigfaltigkeit von D ist. Ist E maximal, dann offenbar auch $L_g(E)$. Damit bildet die Linkstranslation aber Blätter auf Blätter ab, also $L_g(\mathcal{H}_{g'}) = \mathcal{H}_{gg'}$.

Es sei $H = \mathcal{H}_e$ das Blatt, welches die Identität enthält. Dann ist $\mathcal{H}_h = H$ für jedes $h \in H$. Wir wollen zeigen, dass H die gesuchte Lie Untergruppe ist. Dazu zeigen wir zunächst, dass H eine Untergruppe ist: Für beliebige $h, h' \in H$ gilt

$$hh' = L_h(h') \in L_h(H) = L_h(\mathcal{H}_e) = \mathcal{H}_h = H$$

und analog

$$h^{-1} = h^{-1}e \in L_{h^{-1}}(\mathcal{H}_e) = L_{h^{-1}}(\mathcal{H}_h) = \mathcal{H}_{h^{-1}h} = H.$$

Um zu zeigen, dass H eine Lie Untergruppe ist, müssen wir beweisen, dass die Abbildung $\mu : (h, h') \mapsto hh'$ glatt als Abbildung von $H \times H$ nach H ist. Da $H \times H$ eine Untermannigfaltigkeit von $G \times G$ ist, folgt sofort, dass $\mu : H \times H \rightarrow G$ glatt ist. Als Integralmannigfaltigkeit einer involutiven Distribution ist H aber schwach eingebettet, womit μ auch als Abbildung nach H glatt ist.

Es bleibt nur noch die Eindeutigkeit von H zu zeigen. Da H ein Blatt von \mathcal{H} ist, ist \mathfrak{h} die Lie Algebra von H , denn der Tangentialraum an H bei der Identität ist $D_e = \{X_e : X \in \mathfrak{h}\}$. Angenommen \tilde{H} ist eine weitere zusammenhängende Lie Untergruppe mit Lie Algebra \mathfrak{h} . Dann ist auch \tilde{H} eine Integralmannigfaltigkeit für D , womit aufgrund der Maximalität von $H = \mathcal{H}_e$ dann $\tilde{H} \subseteq H$ gelten muss. Ist umgekehrt U Kartenumgebung einer flachen Karte für D , die die Identität enthält, dann ist nach Korollar 2.16 $\tilde{H} \cap U$ Vereinigung offener Teilmengen von Schnitten. Da der Schnitt, der e enthält, eine offene Teilmenge von H ist, impliziert dies, dass \tilde{H} eine Umgebung der Identität in H enthält. Da nach Proposition 1.5 (c) jede solche Umgebung H erzeugt, folgt $\tilde{H} = H$. ■