G. Schranz-Kirlinger
Institut für Analysis und Scientific Computing
TU Wien

MATHEMATIK 3 (Studienberechtigungsprüfung)

Prüfung am 24. 2. 2023

Familienname	Vorname	Matrikelnummer

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und - falls vorhanden - Ihre Matrikelnummer auf die erste Seite. Die Verwendung eines ein-, zweizeiligen (nicht programmierbaren, nicht grafikfähigen) Taschenrechners ist erlaubt. **Die Arbeitszeit beträgt 120 Minuten!**

Alles Gute und viel Erfolg!

Beispiel 1	Beispiel 2	Beispiel 3	Beispiel 4	Gesamt

Note:

1. (10 Punkte)

   1.1) Gegeben ist die reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Welche der nachstehenden Darstellungen entspricht der Zahl a?

   (a) $\frac{(2a)^2}{2a}$
   (b) $\sqrt{a^2}$
   (c) $\frac{1}{\frac{1}{a}}$
   (d) $\frac{\sqrt{16} \cdot a}{4}$
   (e) $\frac{a-2}{2}$
   (f) $\frac{1}{a^{-1}}$

   1.2) Untersuchen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x - 4y + 6z &= 3 \\ -x + 2y - 3z &= 4 \end{aligned}$$

   auf Lösbarkeit. Wie kann das Gleichungssystem und dessen Lösung geometrisch interpretiert werden?

   1.3) Ein Zugunternehmen verzeichnet jedes Jahr die Anzahl der Zugunglücke, die auf einen Zugschaden zurückgehen. Folgende Informationen über drei aufeinanderfolgende Jahre liegen vor:

   1.Jahr: a Zugunglücke, davon $p\,\%$ wegen Zugschaden
   2.Jahr: b Zugunglücke, davon $q\,\%$ wegen Zugschaden
   3.Jahr: c Zugunglücke, davon $r\,\%$ wegen Zugschaden

   Stellen Sie eine Formel für die Gesamtzahl n der Zugunglücke in diesen drei Jahren auf, die auf einen Zugschaden zurückgehen.

   1.4) Der Flächeninhalt $A(t)$ einer Bakterienkultur nimmt mit der Zeit t (in Stunden) exponentiell zu. Am Anfang beträgt er 4 cm^2 und vergrößert sich pro Stunde um 8.5 %.

   (a) Geben Sie das entsprechende Wachstumsgesetz an.
   (b) Wann erreicht die Bakterienkultur eine Fläche von 80 cm^2?
   (c) Berechnen Sie $A(48)$ und interpretieren Sie das Ergebnis im gegebenen Kontext.

2. (10 Punkte)

   2.1) Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und ein zwei reelle Zahlen $r, s \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Terme stellen ebenfalls Vektoren dar?

   (a) $r \cdot (\vec{a} + \vec{b})$
   (b) $r \cdot \vec{a} + \vec{b}$
   (c) $r \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$
   (d) $(r \cdot \vec{a}) \cdot (-s \cdot \vec{b})$
   (e) $s \cdot (\vec{a} + r \cdot \vec{b})$
   (f) $(r \cdot \vec{a} - \vec{b}) \cdot (s \cdot \vec{b} - \vec{a})$

   2.2) Gegeben sind zwei Geraden g und h durch folgende Gleichungen

$$g : X = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \vec{r}, \qquad h : 4x + 3y = -2.$$

   (a) Bestimmen Sie einen Richtungsvektor $\vec{r}$, sodass g und h parallel sind.
   (b) Bestimmen Sie einen Richtungsvektor $\vec{r}$, sodass g und h aufeinander normal stehen. Normieren Sie den Vektor $\vec{r}$.

2.3) Gegeben sei die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch $a_n = \frac{2n-3}{2+3n}$.

(a) Geben Sie die ersten vier Glieder der Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ an.

(b) Stellen Sie eine Vermutung über die Monotonie auf und zeigen Sie diese.

(c) Ist die Folge nach oben bzw. nach unten beschränkt? Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

3. (10 Punkte)

3.1) Geben Sie den Definitionsbereich der Polynomfunktion

$$f(x) = 3 + 2x^2 - x^4$$

an und untersuchen Sie die Funktion in Hinblick auf Nullstellen, Monotonie, lokale und globale Extremstellen sowie Wendestellen. Geben Sie vorhandene Hoch-, Tief- und Wendepunkte an.

Hinweis: Setzen Sie für die Berechnung der Nullstellen $u = x^2$.

3.2) Geben Sie die Funktion $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$. Bestimmen Sie $c \in [0, 3]$, sodass gilt

$$\int_0^c f(x)\,dx = \int_c^3 f(x)\,dx.$$

4. (10 Punkte)

4.1) (a) Geben Sie alle Winkel α an, für die gilt $\sin(\alpha) = 0.5$.

(b) Eine Straße weist 7 % Steigung auf. Ermitteln Sie, unter welchem Winkel die Straße ansteigt. Berechnen Sie den Höhenunterschied zweier Aussichtspunkte, die an dieser geradlinig verlaufenden Straße liegen und entlang der Straße 2506 m entfernt sind.

4.2) (a) Bei einer Prüfung werden aus einer Liste von 50 Fragen sieben Fragen ausgewählt. Auf wie viele Arten ist dies möglich?

(b) Ein Würfel wird zehnmal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augenzahl 5

(i) genau einmal

(ii) höchstens neunmal

(iii) mindestens zweimal und höchstens neunmal

kommt?