**Beispiel einer Studienberechtigungsprüfung (Winkler)**

Name (bitte ausfüllen):

1. Zunächst zur Wiederholung: Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen besteht bekanntlich aus den Zahlen $0, 1, 2, \ldots$. Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist die Menge aller Differenzen $m - n$ von natürlichen Zahlen $m$ und $n$. Die Menge $\mathbb{Q}$ der ganzen Zahlen ist die Menge aller Quotienten (Brüche) $\frac{a}{b}$ von ganzen Zahlen $a$ und $b$ mit $b \neq 0$. Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen enthält neben den rationalen Zahlen auch noch die sogenannten irrationalen Zahlen. Das sind jene Zahlen, die sich zwar der Größe nach mit jeder rationalen Zahl vergleichen lassen, selbst aber nicht zu $\mathbb{Q}$ gehören, d.h. die sich nicht als Quotient ganzer Zahlen schreiben lassen. Es gelten die Teilmengenbeziehungen $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

   (a) Innerhalb welcher der Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ lassen sich die vier Grundrechungsarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division (außer durch 0) uneingeschränkt ausführen, wo nicht? (Wenn Sie Ihre Antwort in Form einer $4 \times 4$-Tabelle darstellen, gehen Sie sicher, dass Sie keine der 16 nachgefragten Antworten vergessen.)

   (b) Geben Sie eine natürliche Zahl $n$ an, für die es keine natürliche Zahl $m$ mit $m^2 = n$ gibt.

   (c) Angenommen, $m$ und $n$ sind natürliche Zahlen. Dann liegt die Zahl $r = \frac{m}{n^2+1}$ in jedem Fall in $\mathbb{R}$. Muss $r$ auch in $\mathbb{Z}$ liegen? Wenn Ihre Antwort *ja* lautet, begründen Sie dies; wenn Ihre Antwort *nein* lautet, geben Sie ein Beispiel für $m$ und $n$ an, so dass $r$ keine ganze Zahl ist. Wenn es Ihnen nützlich erscheint, dürfen Sie sich auf Ihre Antwort in (a) beziehen.

   (d) Wie (c), nur mit $\mathbb{Q}$ statt mit $\mathbb{Z}$.

   (e) Wie man recht leicht beweisen kann, ist die reelle Zahl $\sqrt{2}$ irrational. Immerhin ist $\sqrt{2}$ aber die Lösung der einfachen quadratischen Gleichung $x^2 - 2 = 0$. Seit dem 19. Jahrhundert ist bekannt, dass die reelle Zahl $\pi$ (die bekanntlich das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser eines Kreises angibt) NICHT Lösung einer solchen Gleichung ist, genauer: Die einzigen ganzen Zahlen $a, b, c$, für die $\pi$ Lösung der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ ist, sind $a = b = c = 0$. In welchen der Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ liegt $\pi$, in welchen nicht? (Hinweis: Sie können die richtige Antwort einfach wissen oder auch aus den obigen Überlegungen schließen.)

2. Gegeben ist ein Dreieck $\Delta$ mit den Eckpunkten $A$, $B$ und $C$. Wie üblich seien die diesen Punkten gegenüber liegenden Seitenlängen mit $a$, $b$ bzw. $c$ bezeichnet, die Winkel bei diesen Eckpunkten mit $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$. Im Folgenden sei $a = 6$, $b = 8$ und $c = 10$.

   (a) Zeichnen Sie das Dreieck $\Delta$ (freihändige Skizze mit eingetragener Längeneinheit, z.B. = 1cm, genügt) und beschriften Sie es mit den vorgegebenen Bezeichnungen.

   (b) Wie kann man rein rechnerisch überprüfen, dass $\Delta$ aus (a) im Eckpunkt $C$ einen rechten Winkel hat?

   (c) Stellen Sie die Zahlen $\sin\alpha$ (Wert der Sinusfunktion für den Winkel $\alpha$), $\cos\alpha$ (Cosinus) und $\tan\alpha$ (Tangens) jeweils als Bruch zweier Seitenlängen dar.

   (d) Geben Sie die Werte $\sin\gamma$ und $\cos\gamma$ an.

   (e) Welche Probleme treten bei $\tan\gamma$ auf? (Argumentation über eine geometrische oder algebraische Definition des Tangens mit Hilfe von Sinus und Cosinus.)

3. Gegeben ist die reelle Funktion $f(x) = \frac{2^x}{4}$, die offensichtlich nur positive Werte annimmt.

   (a) Berechnen Sie die Funktionswerte von $f$ an den Stellen $x = -1, 0, 1, 2, 3, 4$.

   (b) Aufgrund der Rechenregel $2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b$ gilt für die Zahl $c = 2^{\frac{1}{2}}$ die Gleichung $c^2 = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 2^1 = 2$. Wegen $c > 0$ folgt daraus $c = \sqrt{2}$. Berechnen Sie damit $f(\frac{1}{2})^2$.

(c) Geben Sie den Wert $f(\frac{5}{2})$ auf eine Nachkommastelle gerundet an.

(d) In Hinblick auf die Differentialrechnung kann es wünschenswert sein, in der angegebenen Darstellung der Funktion $f$ die Basis 2 durch die Basis $e$ des natürlichen Logarithmus ln zu ersetzen. Aufgrund der Definition von ln gilt $2 = e^{\ln 2}$. Damit kann man $f$ umschreiben zu $f(x) = \alpha e^{\lambda x}$, wobei für $\alpha$ und $\lambda$ geeignete Werte zu setzen sind. Welche?

(e) Wie lautet die Ableitung $f'$ der Funktion $f(x)$? (Hinweis: Beachten Sie (d) und verwenden Sie die Kettenregel.)

4. (Nur für Mathematik 2) Wir betrachten Mengen $M$ von Punkten $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, die durch gewisse Eigenschaften gegeben sind, und fragen nach ihrer geometrischen Gestalt.

(a) Bekanntlich beschreibt die Gleichung G: $x^2 + y^2 = 1$ in der Ebene einen Kreis mit Radius $r = 1$. Denn die Menge aller $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die G erfüllen, besteht genau aus den Punkten des Einheitskreises. Lesen wir die Gleichung G als eine in drei Variablen $x, y, z$, so hängt die Gültigkeit von G nicht von der dritten Koordinate $z$ ab. So gehören beispielsweise mit dem Kreispunkt $(1, 0, 0)$ auch alle Punkte $(1, 0, z)$ mit beliebigem $z \in \mathbb{R}$ der Lösungsmenge $M$ von G an. Welche geometrische Gestalt hat die Menge $M$ aufgefasst als Teilmenge des dreidimensionalen Raumes $\mathbb{R}^3$, wenn wir die Werte von $z$ auf $-1 \leq z \leq 1$ beschränken.

(b) Die Gleichung G1: $x + y + z = 1$ beschreibt eine Ebene $\varepsilon$ in $\mathbb{R}^3$, welche die beiden Punkte $A$ und $B$ mit den Koordinaten $(1, 0, 0)$ und $(0, 1, 0)$ enthält. Geben Sie eine weitere Ebenengleichung G2 an derart, dass nur die Punkte auf der Geraden durch $A$ und $B$ sowohl G1 als auch G2 erfüllen.

(c) Geben Sie die Gleichung G3 einer Ebene im $\mathbb{R}^3$ an derart, dass kein Punkt $(x, y, z)$ sowohl G1 aus (b) als auch G3 erfüllt.

(d) Einem beliebig gegebenen Punkt $P$ im Raum ist unter allen Punkten einer Ebene derjenige Punkt $X$ am nächsten, für den die Verbindung zu $P$ normal auf die Ebene steht. Welcher Punkt $X$ ist das im Fall der Ebene $\varepsilon$ aus (b), wenn $P$ der Koordinatenursprung $(0, 0, 0)$ ist?

(e) Berechnen Sie den Abstand zwischen den Punkten $X$ und $P$ aus (d). Hinweis: Die Normale auf $\varepsilon$ durch $P$ besteht aus allen Punkten mit Koordinaten der Form $(x, y, z) = (t, t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

5. (Nur für Mathematik 3) Manchmal werden Funktionen durch mehrere Funktionsterme definiert, die auf unterschiedlichen Definitionsbereichen gelten. So wird in dieser Aufgabe eine Funktion $f$ definiert durch Angabe zweier Funktionen $f_+$ und $f_-$ mit $f(x) = f_-(x)$ für $x < 0$ und $f(x) = f_+(x)$ für $x > 0$. Außerdem wird der Wert $f(0)$ eigens angegeben.

(a) Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ liefert für $x \geq 0$ den Wert $x$, für $x < 0$ den Wert $-x$ (der in beiden Fällen $\geq 0$ ist). Also lässt sich die Betragsfunktion in der eingangs beschriebenen Art definieren mit $f_+(x) = x$, $f_-(x) = -x$ und $f(0) = 0$. Die Ableitungen der Funktionen $f_+$ und $f_-$ sind konstante Funktionen. Mit welchen Werten?

(b) Weil die beiden konstanten Werte für $f_+$ und $f_-$ aus (a) verschieden sind, kann die Betragsfunktion bei $x = 0$ keine Ableitung haben. Illustrieren Sie anhand einer Skizze des Graphen der Betragsfunktion, wie das anschaulich zum Ausdruck kommt.

(c) Wenn auch nicht differenzierbar bei $x = 0$, so ist die Betragsfunktion aus (a) doch überall stetig. Geben Sie nun Funktionen $g_+$ und $g_-$ derart an, dass $g$ an der Stelle 0 nicht stetig sein kann, egal wie man $g(0)$ definiert.

(d) Für eine weitere Funktion $h$ der oben beschriebenen Bauart sei $h_-(x) = 1 - x^2$ und $h_+(x) = \cos x$. Es ist möglich, den Wert $h(0)$ so zu wählen, dass $h$ bei 0 stetig ist. Wie?

(e) Ist $h$ aus (d) stetig, dann sogar differenzierbar. Welchen Wert hat dann $h'(0)$?