Mathematik 1 für Bauingenieure (Winkler)
Musteraufgaben zur Prüfungsvorbereitung

Zusammenfassung

Von den folgenden Aufgaben wurden die ersten 17 schon im Dezember 2013 ausgegeben. Damit sollte eine Idee vermittelt werden, wie Prüfungsfragen aussehen können. Mittlerweile liegen die Angaben mehrerer tatsächlicher Prüfungen vor und sind im Internet unter

`http://www.dmg.tuwien.ac.at/winkler/pruefungen/`

verfügbar. Trotzdem können auch die nachfolgenden Aufgaben weiterhin zur Prüfungsvorbereitung empfohlen werden. Sie wurden ergänzt durch Aufgaben, die auch Neuerungen bei der Vorlesung im Wintersemester 2014/15 berücksichtigen (ab Aufgabe 18) und bei den früheren Prüfungsterminen (bis Dezember 2014) noch kaum eine Entsprechung fanden.

Empfohlen wird, neben den bisherigen Prüfungen und den Musteraufgaben auch die neuen *Unterlagen zur Vorlesung Mathematik 1 für Bauingenieure* durchzuarbeiten, das im Wesentlichen den aktuellen Prüfungsstoff wiedergibt und ebenfalls unter der oben genannten Adresse verfügbar ist. Längere Beweise werden nicht geprüft. Deshalb muss auch nicht das gesamte Skriptum aktiv beherrscht werden. Sehr wohl sollte man aber in der Lage sein, die Gedankengänge nachzuvollziehen (aber ohne sich an einzelnen eventuell unklaren Stellen ewig zu verbeißen; Nachfragen ist erlaubt und kann eventuell viel Zeit sparen) und in den großen Linien verständlich zu reproduzieren. Kürzere Argumentationsketten, besonders wenn sie wiederholt auftreten, sollte man auch aktiv beherrschen und auf konkrete Situationen anwenden können. Hat man sich diese Fähigkeiten erarbeitet, ist man für die Prüfung gut vorbereitet.

Generell kann nicht genug betont werden: In der Mathematik herrscht sehr hohe Präzision. Auch wenn diese mathematische Spielart von Präzision in der Praxis des Ingenieurberufs, wo sehr viele außermathematische Gesichtspunkte zu berücksichtigen sind, nicht immer primär ist, so müssen doch mathematische Texte sehr genau verstanden werden. Denn scheinbar geringfügige Missverständnisse können oft schwerwiegende Fehler nach sich ziehen. Deshalb wird bei der Prüfung großer Wert auf genaues Textverständnis gelegt. Erfahrungsgemäß macht das vielen Anfängern beträchtliche Schwierigkeiten. Seien Sie also möglichst selbstkritisch, wenn es darum geht einzuschätzen, ob Sie diesbezüglich für die bevorstehende Mathematikprüfung schon hinreichend sorgfältig vorbereitet sind.

1. Geben Sie für jede der fünf Zahlenmengen $M = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ an, ob sie die folgende Eigenschaft $E(M)$ hat:

   Für alle Teilmengen $T \subseteq M$ mit $0 \in T$ gilt die Implikation

   $$(\forall n:\ n \in T \Rightarrow n+1 \in T) \Rightarrow T = M.$$

2. Beweisen Sie mit Induktion die Formel

   $$\sum_{k=0}^{n} 3^{-k} = \frac{3}{2}(1 - 3^{-(n+1)})$$

   für alle $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie in Ihrer Ausarbeitung folgende Teile explizit an:

   (a) Induktionsanfang
   (b) Induktionsannahme
   (c) Induktionsbehauptung
   (d) Induktionsschritt

3. (a) Bekanntlich konvergiert jede monotone und beschränkte Folge

   $$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq c \in \mathbb{R}.$$

   Im Beweis dieses Satzes tritt eine Zerlegung $\mathbb{R} = A \cup B$ auf. Dabei besteht A aus jenen $x \in \mathbb{R}$ mit $x \leq a_n$ für wenigstens ein $n \in \mathbb{N}$. Das Komplement B besteht entsprechend aus jenen $x \in \mathbb{R}$ mit $a_n < x$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Welche Eigenschaft von $\mathbb{R}$ (Name und Formulierung dieser Eigenschaft) liefert eine Zahl $x_0 \in \mathbb{R}$, welche sich sehr leicht als der gesuchte Grenzwert $x_0 = \lim_{n\to\infty} a_n$ erweist?

(b) Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^3 - 2$. Sei nun $A = \{x \in \mathbb{R} : \ f(x) < 0\}$ und $B = \{x \in \mathbb{R} : \ f(x) \geq 0\}$. Die Eigenschaft von $\mathbb{R}$, nach der in Teilfrage (a) gefragt wurde, garantiert in analoger Weise wie dort die Existenz einer gewissen reellen Zahl x_0. Um welche Zahl handelt es sich bei vorliegendem f?

4. Wir betrachten reelle Funktionen (Transformationen) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zu jedem $a_0 \in \mathbb{R}$ induziert T eine rekursive Folge mit $a_{n+1} = T(a_n)$ für alle n.

   (a) Angenommen es gibt einen Grenzwert $x = \lim_{n\to\infty} a_n$. Unter einer häufig auftretenden Voraussetzung V an T lässt sich mit Hilfe der Rechnung
   $$T(x) = T(\lim_{n\to\infty} a_n) = \lim_{n\to\infty} T(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = x$$
   schließen, dass x ein Fixpunkt von T ist, d.h. $T(x) = x$. Wie lautet diese Voraussetzung V und in welchem Schritt obiger Gleichungskette wurde sie verwendet?

   (b) Skizzieren Sie die Situation aus (a) anhand eines geeigneten T. Geben Sie dieses T auch durch eine Formel an. Anleitung: Lassen Sie sich von Teil (c) inspirieren.

   (c) Sei $a_0 = 0$ und $a_{n+1} = \frac{a_n}{3} + 1$. Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} a_n$ (Hinweis: Skizze!).

5. Gegeben seien die reellen Zahlen $a_1, a_2, a_2, \ldots$, die wir als Glieder einer Reihe auffassen.

   (a) Definieren Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die n-te Partialsumme s_n.

   (b) Wann nennt man generell eine Folge reeller Zahlen x_n, $n \in \mathbb{N}$, konvergent gegen den Grenzwert x?

   (c) Wann nennt man die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent mit Wert $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}$?

   (d) Sei $a_n = \frac{1}{n+5}$. Finden Sie zu einer beliebig vorgegebenen reellen Zahl C ein n_0 mit $s_{n_0} \geq C$.

   (e) Ist die Reihe mit den Gliedern aus (d) konvergent oder divergent? (Begründung)

6. (a) Wir schreiben $[r, \varphi]$ für die komplexe Zahl z mit Betrag $|z| = r$ und Argument (Winkel) φ. Für das Produkt $z = z_1 z_2$ mit $z_j = [r_j, \varphi_j]$ für $j = 1, 2$ gelte $z = [r, \varphi]$. Wie lassen sich die reellen Zahlen r und φ durch die Zahlen $r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2$ ausdrücken?

   (b) Machen Sie eine Skizze der dritten komplexen Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ von -2 in der komplexen Zahlenebene. Beschriften Sie insbesondere die relevanten Abstände und Winkel.

7. Bekanntlich heißt eine reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ stetig im Punkt $x_0 \in D$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt derart, dass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ auch $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ gilt. Folgenstetigkeit im Punkt x_0 hingegen bedeutet definitionsgemäß, dass für jede Folge mit Gliedern $a_n \in D$ aus $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ auch $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$ folgt.

   (a) Stetigkeit impliziert Folgenstetigkeit. Unter der Voraussetzung $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ kann man zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ nämlich einen Index n_0 finden darart, dass für alle $n \geq n_0$ $|a_n - x_0| < \delta$ gilt mit einem δ wie in der Stetigkeitsdefinition. Vervollständigen Sie die Argumentation.

   (b) Will man beweisen, dass umgekehrt auch aus der Folgenstetigkeit die Stetigkeit von f (jeweils in x_0) folgt, nimmt man indirekt an, es gebe ein $\varepsilon > 0$, welches die Stetigkeitsdefinition verletzt. Dann gibt es zu jedem $\delta = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, ein $a_n \in D$ mit $|a_n - x_0| < \frac{1}{n}$ aber $|f(a_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Warum steht dies im Widerspruch zur Folgenstetigkeit von f in x_0?

   (c) Sei $f(x) = kx + d$ mit gewissen reellen Zahlen k, d. Begründen Sie, warum f stetig (in einem beliebigen Punkt x_0) ist, indem Sie zu einem beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein δ wie in der Definition angeben.

8. Zu berechnen sind Ableitungen f_i' folgender reeller Funktionen f_i, $i = 1, 2, 3$.

(a) $f_1(x) = x^2 g(x)$, wobei g und g' als bekannt angenommen werden dürfen.

(b) In der Situation von Teil (a) gebe es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $|g(x)| \leq c$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $f_1'(0)$ unabhängig von g. Bestimmen Sie diesen Wert.

(c) $f_2(x) = x^x$ für $x > 0$

(d) $f_3(x) = x^{x^x}$ für $x > 0$

9. Gegeben Sei die gebrochen rationale Funktion $f(x) = \frac{x^3+x+2}{x^2+x-2}$.

   (a) Zeigen Sie, dass die angegebene Darstellung von f gekürzt ist, dass also Zähler- und Nennerpolynom nur Konstante als gemeinsame Teiler haben.

   (b) Es gibt eine Darstellung von f als Summe $f = p+r_1+r_2$ eines Polynoms p und gebrochen rationaler Funktionen $r_1 = \frac{p_1}{q_1}$ und $r_2 = \frac{p_2}{q_2}$ mit irreduziblen Nennerpolynomen q_1, q_2 und Zählern p_1, p_2 minimalen Grades. Geben Sie q_1 und q_2 an, ohne die Darstellung von f der angegebenen Form explizit auszurechnen, und erklären Sie den allgemeinen Sachverhalt, auf den Sie sich dabei stützen.

   (c) Geben Sie die Grade von p, p_1 und p_2 aus (b) an, ohne diese drei Polynome explizit auszurechnen, und erklären Sie den allgemeinen Sachverhalt, auf den Sie sich dabei stützen.

   (d) Berechnen Sie nun p, p_1, q_1, p_2 und q_2 aus (b) explizit.

   (e) Geben Sie eine lineare Funktion $l(x) = kx + d$ an mit der Eigenschaft $\lim_{x\to\infty}(f(x) - l(x)) = 0$.

   (f) Skizzieren Sie f und l.

   (g) Ermitteln Sie eine Stammfunktion F_0 von f.

   (h) Angenommen F_0 ist eine Stammfunktion von f. Welche Bauart hat dann die Menge M aller Stammfunktionen von f?

10. Gegeben sei eine reelle Funktion f mit $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

    (a) Für $|x| < 1$ lässt sich $f'(x)$ als Grenzwert einer geometrischen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ darstellen. Welchen Wert hat man für q zu nehmen?

    (b) Es gelte die Potenzreihendarstellung $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Welche a_n sind durch die bisherigen Angaben eindeutig bestimmt, welche nicht? Geben Sie die Werte der eindeutig bestimmten a_n auch an.

    (c) Wie lassen sich die Funktionen tan (Tangens) und arctan (Arcustangens) mit Hilfe von Sinus und Cosinus definieren, und was ist ihr Definitionsbereich?

    (d) Skizzieren Sie $\sin, \cos$ und $\tan$ am Einheitskreis.

    (e) Skizzieren Sie die Graphen von $\sin, \cos, \tan$ und $\arctan$.

    (f) Berechnen Sie $\tan'$ und $\arctan'$. Verwenden dürfen Sie dafür ihre Definition aus (c), die Beziehung $\sin^2 + \cos^2 = 1$, außerdem die Differentiationsregeln $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$, die Quotientenregel und die allgemeine Regel für die Ableitung von Umkehrfunktionen. Markieren Sie überall, welche dieser Regeln einfließt.

    (g) Wie lautet die Potenzreihendarstellung des Arcustangens?

11. Die Exponentialfunktion $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zur Basis $a > 0$ lässt sich eindeutig dadurch definieren, dass man von ihr eine geeignete analytische Eigenschaft E fordert und außerdem eine sogenannte Funktionalgleichung F, die einem wohlbekannten Rechengesetz für Produkte von Potenzen mit gleicher Basis entspricht. Die Umkehrfunktion von $\exp_a$ (auf einem geeigneten Bereich) sei mit g bezeichnet.

    (a) Was kann man als E nehmen und was als F?

(b) Welcher Name ist für die Umkehrfunktion g von $\exp_a$ gebräuchlich?

(c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $g(x)$ definiert?

(d) Wie lautet $g'(x)$?

12. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion. Auf dem Intervall $[-1, 1]$ seien die Beträge aller Ableitungen $f^{(n)}$ durch reelle Zahlen c_n beschränkt, d.h. $|f^{(n)}(x)| \le c_n$ für alle $x \in [-1, 1]$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

    (a) Sei $c_n = c \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Erklären Sie, wie dann aus dem Satz von Taylor folgt, dass f auf dem Intervall $[-1, 1]$ eine Darstellung als Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hat.

    (b) Die Aussage aus Teil (a) gilt sogar, wenn die Voraussetzung an die c_n abgeschwächt wird zu $c_n \le Cq^n$ mit geeigneten (aber festen, von n unabhängigen) reellen Zahlen $q, C > 0$ und für alle $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie ein Beispiel einer Folge von c_n, die für $n \to \infty$ derart rasch wachsen, dass keine Potenzreihendarstellung von f mehr garantiert werden kann.

13. Lokale Extrema einer differenzierbaren reellen Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ und Nullstellen der Ableitung f' stehen in einem engen Zusammenhang, sind aber keineswegs dasselbe.

    (a) Geben Sie eine Definition für ein lokales Maximum von f in $x_0 \in D$, die auch für nicht differenzierbares f sinnvoll ist.

    (b) Geben Sie ein $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, welches bei 5 ein lokales Maximum hat und $f''(5) = 0$ erfüllt. Dieses f soll außerdem auf keinem Intervall positiver Länge konstant sein.

14. Die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ sei durch folgende Forderungen definiert. Und zwar nehme f nur die Werte 0 und 1 an, $f(0) = 0$, und für $x > 0$ sei $n \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $2^{-n-1} < x \le 2^{-n}$. Ist n gerade, so sei $f(x) = 1$, andernfalls sei $f(x) = 0$.

    (a) Skizzieren Sie f.

    (b) An welchen Stellen ist f unstetig?

    (c) Trotz der unendlich vielen Unstetigkeitsstellen ist f Riemann-integrierbar. Um das zu zeigen, ist zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $Z = \{0 = x_0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n = 1\}$ des Intervalls $[0, 1]$ zu wählen derart, dass für die zugehörige Obersumme $O(f, Z)$ und Untersumme $U(f, Z)$ gilt $|O(f, Z) - U(f, Z)| < \varepsilon$. Geben Sie so ein Z für $\varepsilon = \frac{1}{10}$ an.

    (d) Bestimmen Sie $\int_0^1 f(x)\,dx$.

15. Gesucht sind Stammfunktionen F_i der Funktionen f_i, $i = 1, 2, 3$.

    (a) Sei $a > 0$. Geben Sie eine Stammfunktion F_1 von $f_1(x) = \frac{1}{x^2+a}$ an.

    (b) Es gelte $f_2(x) = 1$ für $x > 0$ und $f_2(x) = -1$ für $x < 0$. Ist es möglich, $f_2(0)$ so festzulegen, dass f_2 eine Stammfunktion F_2 besitzt? Wenn ja, gebe man $f_2(0)$ und F_2 an, andernfalls begründe man es. (Anleitung: Man stelle folgende Überlegungen an. Hat F_2 die gewünschten Eigenschaften, so gibt es ein $c_1 \in \mathbb{R}$ mit $F_2(x) = x + c_1$ für alle $x > 0$, analog $F_2(x) = -x + c_2$ für alle $x < 0$. F_2 ist als Stammfunktion differenzierbar, also auch stetig, folglich gilt $c_1 = F_2(0) = c_2$. Nun studiere man die Situation an der Stelle $x = 0$.)

    (c) Hat die Funktion $f_3(x) = |x|$ eine Stammfunktion F_3? (Begründung)

16. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig mit $f(x) := \frac{\sin x}{x}$ für $x \neq 0$.

    (a) Geben Sie den Wert $f(0)$ an.

    (b) Die Funktion hat eine Potenzreihendarstellung an der Stelle 0. Wie lautet diese?

(c) Als stetige Funktion besitzt f eine Stammfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Allerdings lässt sich F nicht mit Hilfe elementarer Funktionen ausdrücken. Verwenden Sie die Trapezregel um das Integral $\int_0^1 f(x)dx$ auf eine Dezimalstelle nach dem Komma genau zu berechnen. Dabei haben Sie Funktionswerte von f an Zwischenstellen hinreichend genau zu berechnen. Tun Sie das mit Hilfe von (b).

(d) Aus (b) lässt sich eine Potenzreihendarstellung für ein F wie in (c) gewinnen. Verwenden Sie eine solche, um das Integral $\int_0^1 f(x)dx$ auf zwei Dezimalstellen nach dem Komma genau zu berechnen.

17. Die Bogenlänge der Parabel $y = f(x) = x^2$ im Bereich $0 \leq x \leq a$ lässt sich durch ein Integral ausdrücken.

(a) Geben Sie dieses Integral an.

(b) Berechnen Sie dieses Integral für $a = 2$. (Achtung, der rechnerische Aufwand übersteigt jenen von tatsächlichen Prüfungsaufgaben. Zur Übung genügt es, wenn Sie sich überlegen, welche Integrationsmethoden zum Ziel führen.)

18. Die Definition

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : \; |a_n - a| < \varepsilon$$

für $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ lässt sich in der folgenden Weise mengentheoretisch umschreiben. Und zwar bezeichne $M(\varepsilon, n, a)$ $(\varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R})$ die Menge aller reellen Folgen $\mathbf{a} = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$. Eine Folge $\mathbf{a}$ konvergiert genau dann gegen a, wenn

$$\mathbf{a} \in \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{n_0\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq n_0} M(\varepsilon, n, a).$$

(a) Wie lässt sich umgekehrt die etwas andere Aussage

$$\mathbf{a} \in \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{n_0\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq n_0} M(\varepsilon, n, a)$$

zu einer äquivalenten quantorenlogischen Formel umschreiben?

(b) Was bedeutet die Formel aus (a) inhaltlich, d.h. was ist a in Bezug auf die Folge $\mathbf{a}$?

(c) Sei $s := \limsup_{n\to\infty} a_n$ und gelte

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : \; a_n < a + \varepsilon.$$

Was lässt sich über die Beziehung von s und a aussagen?

(d) Analog wie (c), statt der dortigen Bedingung jedoch mit

$$\forall \varepsilon > 0 \; \forall n_0 \in \mathbb{N} \; \exists n \geq n_0 : \; a_n > a - \varepsilon.$$

19. Für die Funktion f ist anzugeben, welche der Zahlenbereiche $M \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ die Inklusion $f(M) \subseteq M$ erfüllen. (Ausnahmsweise sollen in dieser Aufgabe auch komplexe Wurzeln als Funktionen interpretiert werden, die eine von mehreren Lösungen auswählen.)

(a) $f(x) := \frac{x^2+3x+1}{x^2+3}$

(b) $f(x) := x^2 + \sqrt{x^2 + 1}$

(c) $f(x) := x^2 + 3x + 1$

(d) $f(x) := x^2 - 3x - 1$

(e) $f(x) := x^2 - \sqrt{x^2 - 5}$

20. Bekanntlich ist jede Relation R definitionsgemäß Teilmenge eines kartesischen Produktes $A \times B$. Unter bestimmten Zusatzbedingungen ist eine Relation sogar eine Funktion $f : D \to B$ mit $D \subseteq A$. Skizzieren Sie die folgenden Relationen $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ als Teilmengen der Zeichenebene und geben Sie an, ob es sich bei R um eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ handelt. Wenn nein, so ist dies zu begründen; wenn ja, so sind die Mengen D und $f(D)$ möglichst explizit zu beschreiben, ein möglichst einfacher Funktionsterm für f anzugeben sowie zu entscheiden, ob f injektiv ist.

    (a) $R := \{(x^3, x^6) : \ x \in \mathbb{R}\}$
    (b) $R := \{(x^6, x^3) : \ x \in \mathbb{R}\}$
    (c) $R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + 2y^2 = 1\}$
    (d) $R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + 2y^2 = 0\}$
    (e) $R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + 2y^2 = -1\}$
    (f) $R := \{(x, |x|) : \ x \in \mathbb{R}\}$
    (g) $R := \{(|x|, x) : \ x \in \mathbb{R}\}$
    (h) $R := \{(x^2, x^2 + 1) : \ x \in \mathbb{R}\}$
    (i) $R := \{(x^2 + 1, x^2) : \ x \in \mathbb{R}\}$

21. In den folgenden Teilaufgaben werden jeweils einige Parameter vorgegeben, von denen eine Teilmenge M von $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ abhängt. Beschreiben Sie die Menge M verbal und eventuell mittels Skizze. Treffen Sie dabei geeignete Fallunterscheidungen (wie beispielsweise ob gewisse Parameter $= 0$ oder $\neq 0$ sind), sofern das für die Erklärungen nützlich ist.

    (a) $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ ax + by = c\}$; vorgegebene Parameter: $a, b, c \in \mathbb{R}$
    (b) $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ ax + by + cz = d\}$; vorgegebene Parameter: $a, b, c, d \in \mathbb{R}$
    (c) $M := \{\mathbf{x}_0 + t\mathbf{x} : \ t \in \mathbb{R}\}$; vorgegebene Parameter: $\mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$
    (d) $M := \{\mathbf{x}_0 + t_1\mathbf{x}_1 + t_2\mathbf{x}_2 : \ t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$; vorgegebene Parameter: $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3$
    (e) $M := \{\mathbf{x}_0 + t_1\mathbf{x}_1 + t_2\mathbf{x}_2 + t_3\mathbf{x}_3 : \ t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}\}$; vorgegebene Parameter: $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in \mathbb{R}^3$
    (f) $M := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \ \mathbf{x}\mathbf{y} = c\}$ vorgegebene Parameter: $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2, c \in \mathbb{R}$
    (g) $M := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \ \mathbf{x}\mathbf{y} \leq c\}$ vorgegebener Parameter: $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2, c \in \mathbb{R}$
    (h) $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ a \leq x \leq b, \ x^2 + y^2 \leq 4\}$; vorgegebene Parameter: $a, b \in \mathbb{R}$
    (i) $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$; vorgegebene Parameter: $a, b, c \in \mathbb{R}$

22. Zwei kombinatorische Fragen:

    (a) Wieviele natürliche Zahlen n mit $1 \leq n \leq 1000$ sind weder durch $2, 3, 5$ noch durch 7 teilbar? Hinweis: Bezeichnet T_a ($a \in \mathbb{N}$) die Menge aller durch a teilbaren n, so gilt für teilerfremde a, b die Beziehung $T_a \cap T_b = T_{ab}$, außerdem ist $|T_a \cap \{1, 2, \ldots, 1000\}|$ für $a > 0$ der auf die nächste ganze Zahl abgerundete Bruch $\frac{1000}{a}$. Verwenden Sie das Inklusions-Exklusionsprinzip.

    (b) Eine Gruppe von $n = 10$ Personen soll mit Obst versorgt werden. Und zwar soll jede Person ein Stück bekommen. Zur Verfügung stehen $a = 2$ Birnen, $b = 3$ Bananen und $c = 5$ Äpfel. Wieviele Möglichkeiten gibt es, das vorhandene Obst aufzuteilen? Dabei sind alle Äpfel untereinander als gleichartig zu betrachten, analog alle Bananen und die beiden Birnen. Geben Sie auch eine allgemeine Formel für andere Werte von n, a, b, c mit $a + b + c = n$ an.

23. Polynome und ihre Nullstellen:

    (a) Geben Sie die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_4 \in \mathbb{R}$ eines Polynoms $p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, an mit

        i. keiner reellen Nullstelle.

        ii. genau einer reellen Nullstelle.

        iii. genau zwei reellen Nullstellen.

        iv. genau drei reellen Nullstellen.

        v. genau vier reellen Nullstellen.

    (b) Finden Sie sämtliche komplexen Nullstellen des Polynoms $p(x) := x^4 - x^2 + 2$.

24. Finden Sie ohne Taschenrechner oder sonstige technische Hilfsmittel eine rationale Zahl $r = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, mit $|r - \sqrt{3}| < \frac{1}{100}$. Je kleiner q, desto besser. Hinweis: Newton-Verfahren.

25. Sei $f(x) := \frac{\sin x}{x^2}$ $(x \neq 0)$. Wir interessieren uns für Integrale von f sowohl im Riemannschen als auch im Lebesgueschen Sinn. Die Teilfragen müssen nicht unbedingt in der angegebenen Reihenfolge behandelt werden.

    (a) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ existiert das Riemannintegral $\int_a^b f(x)\,dx$? (Begründung für positive wie auch negative Fälle)

    (b) Wie steht es mit den uneigentlichen Riemannintegralen $\int_0^b f(x)\,dx$ mit $b > 0$ und $\int_a^\infty f(x)\,dx$.

    (c) Über welche zusammenhängenden Teilmengen $M \subseteq \mathbb{R}$ ist f im Lebesgueschen Sinn integrierbar?

    (d) Behandeln Sie speziell das Lebesguesche Integral $\int_{[\pi,\infty)} f\,d\lambda$. Ist es definiert? Hat es gar einen endlichen Wert I? Wenn ja, ermitteln Sie eine ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ mit $|I - k| \leq 1$.