Mathematik 2 für Bauingenieure (Winkler)
Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung

Die hier zusammengestellten Aufgaben/Fragen sind von etwas anderer Art als die Musteraufgaben am Ende des ersten Semesters. Der Grund liegt in der Zweiteilung der Prüfung zu Mathematik 2, wo es neben dem schriftlichen auch einen mündlichen Teil gibt. Die nachfolgenden Fragen sollen auf beide Teile vorbereiten, insbesondere auch auf den mündlichen, der stärker als der schriftliche Teil auch theoretisches Verständnis im Auge hat. Es soll ein Eindruck vermittelt werden, in welcher Tiefe dieses theoretische Verständnis bei der Prüfung erwartet wird. Die in den Übungen gerechneten Aufgaben decken die eher rechnerischen Aspekte ab, die beim schriftlichen Prüfungsteil stärker zur Geltung kommen als beim mündlichen. Insgesamt sollte also eine sehr solide Vorbereitung auf die Prüfung möglich sein. Nicht bei allen Fragen ist es notwendig, die Antworten in schriftlicher Form vollständig auszuarbeiten. Entscheidend ist, dass Sie die wesentlichen Punkte, auf die die Fragen abzielen, erkennen und erklären können.

STOCHASTIK

1. Empirischer Mittelwert: Angenommen, N verschiedene Messungen einer Größe ergeben die (der Größe nach georndeten) numerischen Werte $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_N \in \mathbb{R}$.
   (a) Wie ist der empirische Mittelwert $\bar{x}$ definiert?
   (b) Angenommen, man verschiebt die Messskala um c Einheiten derart, dass jedes x_n durch $y_n = x_n + c$ zu ersetzen ist. Gilt dann auch für den Mittelwert $\bar{y}$ der y_n stets die Beziehung $\bar{y} = \bar{x} + c$? (Begründung oder Gegenbeispiel)
   (c) Angenommen, man verkleinert die Einheit, in der die x_n gemessen wurden, um einen Faktor λ derart, dass jedes x_n durch $z_n = \lambda x_n$ zu ersetzen ist. Gilt dann auch für den Mittelwert $\bar{z}$ der z_n stets die Beziehung $\bar{z} = \lambda\bar{x}$? (Begründung oder Gegenbeispiel)
   (d) Angenommen man ersetzt die x_n durch die Zahlen $u_n = e^{x_n}$. Gilt dann auch für den Mittelwert $\bar{u}$ der u_n stets die Beziehung $\bar{u} = e^{\bar{x}}$? (Begründung oder Gegenbeispiel)
2. Wie die vorige Aufgabe, jedoch nicht für den Mittelwert, sondern für weitere wichtige stochastische Kenngrößen. Überlegen Sie sich jeweils, ob sich eventuell eine andere einfache aber interessante Aussage machen lässt, die zuvor im Fall des Mittelwertes noch nicht zur Sprache gekommen ist.
   (a) Mittlere absolute Abweichung
   (b) Varianz
   (c) Median, Quartile und, allgemeiner, Quantile
   (d) Empirische Verteilungsfunktion
3. Für jede der folgenden Situationen ist ein vernünftiges Modell in Form eines Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und einer Zufallsgröße X als Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$ gesucht. Dabei sind Ω und X jedenfalls explizit anzugeben, $\mathcal{A}$ so weit Ihnen möglich und $\mathbb{P}$ möglichst als Formel für $\mathbb{P}(A)$ $(A \in \mathcal{A})$ oder wenigstens verbal. Bestimmen Sie außerdem die Verteilung $\mathbb{P}_X$, den Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ und die Varianz $\mathbb{V}(X)$ von X.
   (a) Zwei Spieler A und B würfeln, jeder mit einem (üblichen, fairen Spiel-) Würfel. Die von A bzw. B gewürfelten Augenzahlen seien mit $z_A, z_B \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ bezeichnet. Spieler A erhält $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ Euro von Spieler B, wenn $z_A = nz_B$ gilt, und vice versa. Die interessierende Größe X ist der Gewinn bzw. (bei negativem Gewinn) der Verlust von Spieler A.

(b) Eine kreisförmige Zielscheibe Z mit Radius 1 wird zufällig getroffen in dem Sinn, dass die Wahrscheinlichkeit, einen bestimmten Teilbereich $A \subseteq Z$ zu treffen, proportional zur Fläche von A ist. Die interessierende Größe X ist der Abstand eines Treffers vom Mittelpunkt von Z. Ein Treffer werde durch sein Koordinatenpaar (x, y) beschrieben, wobei der Koordinatenursprung im Mittelpunkt von Z liege.

4. Berechnen Sie die gesuchten Anzahlen. Geben Sie dabei auch ein mathematisches Modell an, d.h. eine Menge M gewisser Zahlen, Mengen, Abbildungen/Funktionen etc., so dass die gesuchte Anzahl mit der Anzahl $|M|$ der Elemente von M übereinstimmt.

   (a) Die Anzahl der möglichen Passwörter der Länge l, die mit s Symbolen gebildet werden können.

   (b) Die Anzahl jener $n \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq n \leq 1000$, die Quadrate oder dritte Potenzen ganzer Zahlen sind.

   (c) Die Anzahl der möglichen Besetzungen eines Streichquartetts (bestehend aus 1.Geige, 2.Geige, Bratsche und Cello, die alle unterschiedliche Stimmen zu spielen haben) aus einer Gruppe von 20 Musikern, die jeweils alle zu besetzenden Instrumente beherrschen.

   (d) Ähnlich (c), wobei allerdings jeder Musiker nur ein Instrument beherrscht. Und zwar stehen diesmal 10 Geiger, 5 Bratschisten und 6 Cellisten zur Auswahl.

   (e) Die Anzahl der Fußballmannschaften (ein Tormann, 10 Feldspieler), die aus einem Kader von 3 Tormännern und 20 Feldspielern gebildet werden können. Dabei soll bei den Feldspielern nicht zwischen verschiedenen Positionen (Verteidiger, Stürmer etc.) unterschieden werden.

   (f) Erklären Sie, warum die beiden Aufgaben (d) und (e) mathematisch derselben Problemklasse zuzuordnen sind.

   (g) Wir betrachten n-Tupel $t = (k_1, \ldots, k_n)$ natürlicher Zahlen k_j und endliche Folgen solcher n-tupel $t_0, t_1, \ldots, t_l$, die folgende Eigenschaft haben: Das auf t_i folgende n-tupel t_{i+1} unterscheidet sich von t_i nur an einer Stelle, wobei die entsprechende Eintragung um 1 erhöht wurde. Sei $K \in \mathbb{N}$, $t_0 = (0, 0, \ldots, 0)$ und $t_l = (K, K, \ldots, K)$. Welchen Wert muss dann l haben und wieviele l-tupel $(t_0, t_1, \ldots, t_l)$ der beschriebenen Art gibt es in diesem Fall?

5. Bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit

   (a) Wie lautet die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A|B)$ der Menge A unter der Bedingung B?

   (b) Wann nennt man zwei oder auch mehr als zwei Ereignisse unabhängig?

   (c) Geben Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(A|B)$ für mehrere Ereignisse $A, B \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ an, wenn in üblicher Weise das Würfeln mit einem fairen Würfel modelliert wird. Finden Sie insbesondere Beispiele, wo $\mathbb{P}(A|B)$ kleiner, gleich oder größer ist als $\mathbb{P}(A)$.

   (d) In welchen und wie vielen Fällen aus (c) sind A und B unabhängig?

   (e) Wie (b), allerdings mit drei Mengen A, B und C.

6. Satz von Bayes

   (a) Formulieren Sie den Satz von Bayes.

   (b) Erläutern Sie, in welchen Situationen der Satz von Bayes erfolgreich angewendet werden kann.

   (c) Geben Sie ein typisches Beispiel, wo der Satz von Bayes angewendet werden kann und das verschieden ist von jenen aus Vorlesung und Übung.

7. Zufallsgröße (-variable), Verteilung, Erwartungswert, Varianz

   (a) Was ist eine Zufallsgröße X, was ihre Verteilung $\mathbb{P}_X$? Beachten Sie auch die Unterscheidung zwischen diskreten und stetigen Zufallsgrößen (Dichtefunktionen!).
   (b) Wie berechnet man den Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ und die Varianz $\mathbb{V}(X)$ einer diskreten Zufallsgröße X?
   (c) Welche Schwierigkeiten müssen gelöst werden, wenn man statt einer diskreten eine stetige Zufallsgröße X betrachtet? Wie gelingt das?
   (d) Geben Sie an, in welchen typischen Situationen die folgenden diskreten Verteilungen auftreten: diskrete Gleichverteilung, Binomialverteilung, geometrische Verteilung, hypergeometrische Verteilung, Poissonverteilung.
   (e) Beschreiben Sie die Verteilungen aus (d) mit Formeln mit den jeweiligen Parametern.
   (f) Können Sie die zugehörigen Erwartungswerte herleiten?
   (g) Diskutieren Sie analog zu (d), (e) und (f) folgende stetige Verteilungen: stetige Gleichverteilung, Normalverteilung, geometrische Verteilung.

8. Tschebyschev, Gesetz der großen Zahlen

   (a) Was lässt sich über Erwartungswert $\mathbb{E}(X+Y)$ und Varianz $\mathbb{V}(X+Y)$ zweier oder auch mehrerer Zufallsgrößen aussagen?
   (b) Was folgt daraus für Erwartungswert und Varianz von gemittelten Summen $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ unabhängiger X_i?
   (c) Was besagt die Tschebyschev'sche Ungleichung generell und im Besonderen in der Situation aus (b), sofern die X_i alle dieselbe Varianz σ^2 haben?
   (d) Was besagt das Gesetz der großen Zahlen (schwach und stark) und wie hängt es mit (a) bis (c) zusammen?

9. Zentraler Grenzwertsatz (ZGWS) und Rolle der Normalverteilung ν_{μ,σ^2} (μ = Mittelwert, σ^2 = Varianz)

   (a) Wie ist die Normalverteilung definiert? (Angabe der Dichtefunktion und Erläuterung, wie generell Dichtefunktionen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen zusammenhängen)
   (b) Wie verändert sich die Gestalt der Dichtefunktion der Normalverteilung bei variierendem μ und σ^2?
   (c) Der ZGWS besagt, grob gesprochen, dass Größen, die als Summe vieler kleiner Summanden entstehen, annähernd normalverteilt sind. Als mathematische Aussage ist das aber viel zu ungenau. Erläutern Sie das anhand illustrativer Beispiele.
   (d) Geben Sie eine präzise Formulierung des ZGWS (es genügt irgendeine Variante, die Ihnen bekannt ist). Seien Sie sorgfältig bei den Voraussetzungen. Behandeln Sie Ihre Antworten aus (c) noch einmal im Lichte der präzisen Formulierung des ZGWS.

10. Schätzer, Konfidenzintervalle, Hypothesentesten

   (a) Welche Schätzer von Erwartungswert und Varianz einer Zufallsgröße X aufgrund einer Stichprobe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bieten sich an? Diskutieren Sie, ob diese Schätzer erwartungstreu bzw. konsistent sind.
   (b) Diskutieren Sie den Begriff des Konfidenzintervalls im Lichte von (a).
   (c) Diskutieren Sie den Begriff eines Tests im Lichte von (a) und (b).

LINEARE ALGEBRA

11. Vektorraum (Def., Beispiele, Unterräume, Lineare Hülle): Gegeben seien zwei Vektoren im $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{x} = (1, 2, 3)$ und $\mathbf{y} = (-2, 0, 1)$.

    (a) Aus welchen Vektoren besteht die Lineare Hülle $L = L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$?

    (b) Erläutern Sie, warum die Lineare Hülle L aus (a) der kleinste Unterraum ist, der beide Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ enthält. Beziehen Sie sich dabei auf die Definition eines Unterraumes U.

    (c) Zeigen Sie anhand der Definition von linearer Unabhängigkeit, dass die gegebenen Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ linear unabhängig sind.

    (d) Wiederholen Sie die Definition einer Basis eines Vektorraumes V und erklären Sie, ob $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ Basis eines geeigneten Vektorraums ist.

    (e) Beschreiben Sie geometrisch, welche Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ Unterräume sind und klassifizieren Sie diese hinsichtlich ihrer Dimension.

    (f) Finden Sie einen Vektor $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)$ derart, dass $B = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

    (g) Ein beliebiger Vektor $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ (Darstellung bezüglich der kanonischen Basis) besitzt auch eine Darstellung (a'_1, a'_2, a'_3) bezüglich der Basis B aus (f). Wie lassen sich diese beiden Darstellungen ineinander überführen? Besprechen Sie beide Richtungen.

    (h) Durch welche Eigenschaften ist eine lineare Abbildung $f : V_1 \to V_2$ gekennzeichnet? Welche Struktur müssen die Mengen V_1 und V_2 haben, damit dieser Begriff überhaupt sinnvoll ist?

    (i) Gegeben sei eine $n \times m$-Matrix $A = (a_{ij})$ ($1 \leq i \leq n$ Zeilen, $1 \leq j \leq m$ Spalten). Erklären Sie, wie diese Matrix bezüglich gegebener Basen eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ darstellt. Behandeln Sie insbesondere den Fall der kanonischen Basis.

    (j) Der in (i) beschriebene Zusammenhang zwischen $n \times m$-Matrizen und linearen Abbildungen ist nicht nur bijektiv sondern selbst eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen W_1 und W_2 der Dimension mn. Erklären Sie das und geben Sie insbesondere die Operationen auf den Vektorräumen W_1 und W_2 explizit an.

    (k) Welche Bedeutung hat die Multiplikation von Matrizen für die entsprechenden linearen Abbildungen? (Sorgfältige Erklärung!)

    (l) Geben Sie eine 3×4-Matrix vom Rang 2 an, in der je zwei Zeilen als Vektoren im $\mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind. Wie groß ist der Defekt dieser Matrix (der durch sie bzgl. der kanonischen Basis definierten linearen Abbildung)?

    (m) Deuten Sie den Kern der Abbildung aus (l) als Lösung eines (homogenen oder inhomogenen?) linearen Gleichungssystems und geben Sie ihn in Parameterdarstellung an.

    (n) Wie hängen die Lösung von homogenen und inhomogenen linearen Gleichungssystemen zusammen?

12. Determinanten:

    (a) Geben Sie eine geometrische Interpretation der Determinante von n Vektoren im $\mathbb{R}^n$ für $n = 1, 2, 3$.

    (b) Erklären Sie damit die Bedeutung der Determinante einer quadratischen Matrix bzw. der von ihr dargestellten linearen Abbildung.

    (c) Sei A eine quadratische Matrix mit Determinante 0. Geben Sie mehrere dazu äquivalente Aussagen über A bzw. über die durch A dargestellte lineare Abbildung an.

    (d) Wie lautet die Formel für die Determinante einer $n \times n$-Matrix A mit Eintragungen $a_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$?

(e) Schließen Sie daraus auf die Regel von Sarrus für $n = 3$.

(f) Wie lautet der Produktsatz für Determinanten und wie lässt er sich geometrisch plausibel machen (siehe (a) und (b)).

13. Das Gauß'sche Eliminationsverfahren ist für mehrere Zwecke die Methode der Wahl: Lösung von linearen Gleichungssystemen, Bestimmung des Ranges einer Matrix, Berechnung von Determinante und Inverser einer quadratischen Matrix. Bei dem Verfahren treten gewisse sogenannte erlaubte Umformungen auf, die gewisse Eigenschaften der Matrix bewahren. Erklären Sie in den genannten Kontexten etwas genauer die Wirkung von:

    (a) Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen

    (b) Vertauschung von zwei Zeilen

    (c) Vertauschung von zwei Spalten

    (d) Multiplikation einer Zeile mit einem Faktor ungleich 0.

14. Skalarprodukte

    (a) Als Abstraktion des gewöhnlichen Skalarproduktes $\mathbf{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ für $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ nennt man allgemeiner alle Abbildungen $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{xy}$, Skalarprodukt, sofern sie gewisse Bedingungen erfüllen. Welche?

    (b) Jedes Skalarprodukt induziert eine Norm, indem man $||\mathbf{x}|| := \sqrt{\mathbf{xx}}$ setzt. Damit und mit (a) lässt sich die sogenannte Cauchy-Schwarzsche Ungleichung beweisen. Wie lautet diese?

    (c) Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung wiederum lässt sich die Dreiecksungleichung für Vektoren ableiten. Wie lautet diese?

    (d) Erklären Sie, wie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung in beliebigen Räumen mit Skalarprodukt Winkelmessung möglich macht. (Hinweis: Verwenden Sie, dass $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ bijektiv ist.)

15. Eigenwerte

    (a) Wiederholen Sie die Definitionen von Eigenvektor und Eigenwert.

    (b) Was versteht man unter dem charakteristischen Polynom einer quadratischen Matrix und was hat es mit der Ermittlung von Eigenwerten und Eigenvektoren zu tun?

    (c) Wann nennt man eine Matrix diagonalisierbar und was hat das mit ihren Eigenwerten zu tun? (Algebraische und geometrische Vielfachheit beachten!)

    (d) Wie lassen sich die Potenzen einer diagonalisierbaren Matrix A auf vergleichsweise einfache Weise berechnen?

    (e) Was versteht man unter einer orthogonalen Matrix?

    (f) Was lässt sich über symmetrische Matrizen in Hinblick auf die vorangegangenen Fragen aussagen?

DIFFERENTIALRECHUNG

16. Der Begriff der Ableitung (Differential) im Höherdimensionalen ist wesentlich anspruchsvoller als im Eindimensionalen. Im Folgenden sei $f : \mathbb{R}^m \supseteq D \to \mathbb{R}^n$, wobei m und n eventuell spezifiziert werden.

    (a) Geben Sie geometrische Interpretationen für verschiedene Werte von $m, n \in \mathbb{N}$, jedenfalls für alle Möglichkeiten mit $1 \leq m, n \leq 3$.

    (b) Rekapitulieren Sie die Definition der Ableitung im Fall $m = n = 1$ mittels Differentialquotienten und erläutern Sie, warum diese Definition für $m \geq 2$ nicht sinnvoll ist.

(c) Was ergibt sich bei (b) im Fall $m = 1$ und $n \geq 2$?

(d) Welche Alternative zum Differentialquotienten besteht für den allgemeinen Fall (d.h. vor allem für $m \geq 2$)? (Definition der höherdimensionalen Ableitung $f'(\mathbf{x})$ von f an der Stelle $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$)

(e) Erläutern Sie den Begriff der Funktionalmatrix über die Definition von $f'(\mathbf{x})$ aus (d).

(f) Was versteht man unter partiellen Ableitungen?

(g) Erklären Sie, wie und warum in der Funktionalmatrix die partiellen Ableitungen auftreten.

(h) Geben Sie eine hinreichende Bedingung an die partiellen Ableitungen an dafür, dass die Funktion auch wirklich differenzierbar ist (und die Funktionalmatrix somit auch wirklich die Ableitung darstellt).

(i) Wie ist im Fall $n = 1$ die Richtungsableitung (nach einem Vektor der Länge 1) definiert und wie lässt sie sich aus der Funktionalmatrix ermitteln?

(j) Was versteht man für $n = 1$ unter dem Gradienten und welche interessante Beziehung besteht zu den Richtungsableitungen?

17. Höhere Ableitungen, Satz von Schwarz (Orthogonalbasis). Sei nun $f : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to \mathbb{R}$.

(a) Die zunehmende Kompliziertheit der Differentialrechnung im Höherdimensionalen wird besonders bei den höheren Ableitungen manifest. Erläutern Sie das anhand eines Beispiels für die zweite Ableitung von f.

(b) Wie steht damit die sogenannte Hessesche Matrix in Zusammenhang?

(c) Die Hessesche Matrix aus (b) ist in der Praxis meist symmetrisch. Auf welchen Satz ist das zurückzuführen? (Formulierung des Satzes und Definition der partiellen Ableitungen zweiten Grades)

(d) So wie die erste Ableitung einer linearen lokalen Approximation entspricht, kann man die zweiten Ableitungen für eine lokale Approximation an einer Stelle $\mathbf{x}$ durch ein Polynom p zweiten Grades, das sogenannte zweite Taylorpolynom, verwenden. Es hat die Form
$$p(x, y) = a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2 + a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{0,0}.$$
Wie hängen die Koeffizienten $a_{i,j}$ mit den Ableitungen von f zusammen?

18. So wie im Eindimensionalen Fall geben erste und zweite Ableitung einer Funktion auch im Höherdimensionalen Auskunft über Extremstellen. Sei dazu $f : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to \mathbb{R}$ und $\mathbf{x} \in D$.

(a) Wiederholen Sie die Definition einer lokalen/globalen Extremstelle bzw. eines lokalen/globalen Extremums (Maximums/Minimums).

(b) Der Satz vom Maximum gilt entsprechend auch im Höherdimensionalen. Wie genau lautet er?

(c) Unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen ist $f'(\mathbf{x}) = 0$ (Nullmatrix = Nullvektor) eine notwendige oder hinreichende Bedingung (welche der beiden?) für das Vorliegen einer lokalen Extremstelle von f in $\mathbf{x}$.

(d) Unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen lässt sich aus $f''(\mathbf{x})$ eine notwendige oder hinreichende Bedingung (welche der beiden?) für das Vorliegen einer lokalen Extremstelle von f in $\mathbf{x}$ ablesen?

(e) Im Gegensatz zum Eindimensionalen können im Höherdimensionalen auch Sattelpunkte auftreten. Was versteht man darunter, wie lassen sie sich veranschaulichen (Sattel!) und wie ordnen sie sich in (d) ein?

19. Lösungsverfahren ohne und mit Nebenbedingungen. Die Erkenntnisse aus der vorigen Aufgabe lassen sich zu einer Strategie für die Lösung von Extremwertaufgaben verwerten. Skizzieren Sie diese Strategie, indem Sie die folgenden Schlagworte genauer ausführen. Dabei sei wieder $f : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to \mathbb{R}$.

    (a) Wann lässt sich a priori eine Aussage machen, ob f überhaupt Minimum und/oder Maximum annimmt?
    (b) Unterscheidung: Eckpunkte; Randpunkte, die keine Eckpunkte sind; innere Punkte. Diese sind mit jeweils eigenen Methoden zu untersuchen.
    (c) Eckpunkte: Hoffentlich nur endlich viele; in f einsetzen und Funktionswerte notieren.
    (d) Falls f diffenzierbar, innere Punkte $\mathbf{x}$ mit $f'(\mathbf{x}) = 0$ (Gradient) aufsuchen.
    (e) Randkurven: Methode der Lagrangemultiplikatoren (wie funktioniert sie, wie lässt sie sich plausibel machen?)
    (f) Modifikation bei Nebenbedingungen: Wieder Lagrangemultiplikatoren.
    (g) Vergleich sämtlicher gefundener Kandidaten für Extremstellen.

INTEGRALRECHUNG

20. Eindimensionaler, höherdimensionaler und wahrscheinlichkeitstheoretischer Integralbegriff lassen sich auf eine gemeinsame maßtheoretische Basis stellen. Die Schreibweise $I = \int_A f \, d\lambda$ für ein Integral I erlaubt alle drei genannten Interpretationen. Erläutern Sie alle vorkommenden Symbole für folgende Fälle.

    (a) Eindimensionales Riemannintegral über ein Intervall $[a, b]$
    (b) Volumsberechnung unterhalb des Funktionsgebirges von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
    (c) Berechnung des Erwartungswertes einer nach einem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_X$ verteilten Zufallsgröße X

21. Die wichtigste Technik, höherdimensionale Integrale auf eindimensionale zurückzuführen, fußt auf dem Satz von Fubini.

    (a) Erläutern Sie die Grundidee das Satzes von Fubini.
    (b) Überlegen Sie sich mit Hilfe des Satzes von Fubini eine Formel für die Berechnung des Volumens eines Rotationskörpers $R = R_f$. Dieser ist gegeben durch eine reelle Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und die Festsetzung $R = \{(x, y, z) : \; a \leq x \leq b, \; y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}$. Veranschaulichen Sie die Situation geometrisch.
    (c) Ermitteln Sie mit Hilfe des Satzes von Fubini eine Formel für die Fläche, die von einer Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b \in \mathbb{R}$ vorgegeben) begrenzt ist.
    (d) Leiten Sie analog zu (c) eine Formel her für das Volumen eines Ellipsoids, dessen Oberfläche gegeben ist durch die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, ($a, b, c \in \mathbb{R}$ vorgegeben).

22. Funktionaldeterminante und Substitutionsregel

    (a) Erläutern Sie die Grundidee der Substitutionsregel und der Rolle, die dabei die Funktionaldeterminante spielt.
    (b) Beschreiben Sie Polar-, Kugel-, Zylinder- und Kegelkordinaten.
    (c) Berechnen Sie zu (b) die zugehörigen Funktionaldeterminanten.
    (d) Verwenden Sie die Funktionaldeterminanten aus (c) zur Berechnung der entsprechenden Flächen bzw. Volumina.

(e) Führen Sie die Fläche der Ellipse bzw. das Volumen des Ellipsoids aus der vorangegangenen Aufgabe mittels geeigneter Variablensubstitution und Substitutionsregel auf die bekannte Fläche des Einheitskreises bzw. auf das bekannte Volumen der Einheitskugel zurück.

23. Kurvenintegrale. Im Folgenden bezeichne $\mathbf{v}$ stets ein hinreichend glattes (z.B. stetig differenzierbares) Vektorfeld in $\mathbb{R}^3$.

    (a) Geben Sie sowohl die mathematische Definition eines Vektorfeldes $\mathbf{v}$ im $\mathbb{R}^3$ an als auch zwei Beispiele physikalischer Interpretationen: Gravitationsfeld, elektromagnetisches Feld.

    (b) Der Weg $\mathbf{w} : [0, T] \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{w}(t) = (w_1(t), w_2(t), w_3(t))$, führe vom Punkt $\mathbf{a} = \mathbf{w}(0)$ zum Punkt $\mathbf{b} = \mathbf{w}(T)$. Die Koordinatenfunktionen $w_i : [0, T] \to \mathbb{R}$ seien stetig differenzierbar. Mit welchem Integranden f lässt sich das Kurvenintegral $I = \int \mathbf{v}\, d\mathbf{w}$ als gewöhnliches eindimensionales Riemannintegral $I = \int_0^T f(t)\, dt$ schreiben?

    Die nachfolgenden Aufgabenteile wären für die Prüfung zu umfangreich. Sie mögen aber als Illustration dienen.

    (c) Überlegen Sie, wie man die Arbeit berechnen könnte, die nötig ist, um ein Gramm von der Erde auf den Mond zu bringen. Welche Geschwindigkeit bräuchte ein Geschoß, das nach dem Abschuss dem freien Fall überlassen wäre? (Der Luftwiderstand darf vernachlässigt werden.) Welche physikalischen Gesetze braucht man für diese Berechnung, welche Daten sind zu erheben und welche mathematischen Berechnungen sind durchzuführen?

    (d) Führen Sie die Aufgabe (c) wirklich durch.

    (e) Wie (c) und (d), nur mit der Sonne statt mit dem Mond.

    (f) Wie (c)-(e), nur ohne zweites Gravitationsfeld. Präzisieren Sie die sich daraus ergebende Aufgabe. (Hinweis: Fluchtgeschwindigkeit und -energie erweisen sich als endlich. Warum?)

    (g) Bei den obigen Überlegungen wurde der Weg nicht näher spezifiziert. Tatsächlich sind die auftretenden Integrale wegunabhängig, d.h. sie hängen nur von Anfangs- und Endpunkt des Weges ab, nicht von seinem Verlauf. Das liegt daran, dass es sich um Potentialfelder handelt. Erläutern Sie diese Zusammenhänge.

24. Oberflächenberechnung und -integrale

    (a) Erklären Sie, wie man die Oberfläche einer Kugel berechnen kann und welche Überlegungen der Berechnung zugrunde liegen.

    (b) Abstrahieren Sie aus (a) und schließen Sie auf eine Formel zur Oberflächenberechnung. Sie dürfen dabei voraussetzen, dass alle involvierten Funktionen hinreichend glatt, d.h. wenigstens stetig differenzierbar sind.

25. Integralsätze. Erklären Sie die Grundideen der folgenden Sätze und stellen Sie zwischen ihnen so weit wie möglich Analogien her.

    (a) Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

    (b) Satz von Green in der Ebene, Variante mit Divergenz

    (c) Leibnizsche Sektorformel als Spezialfall

    (d) Satz von Green in der Ebene, Variante mit Rotation

    (e) Satz von Gauß im Raum

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

26. Erläutern Sie anhand geeigneter Beispiele Gemeinsamkeiten, Besonderheiten und Unterschiede von:

    (a) Gleichungssystemen über den reellen (oder auch komplexen) Zahlen, (z.B. linearen wie sie in der Linearen Algebra behandelt wurden)

    (b) Funktionalgleichungen generell

    (c) Funktionalgleichungen ohne Differentiation

    (d) Differentialgleichungen (gewöhnlich versus partiell)

    (e) linearen (homogenen wir inhomogenen) versus nichtlinearen Gleichungssystemen wie auch Differentialgleichungen bzw. Differentialgleichungssystemen.

27. Einer der wichtigsten Sätze aus der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen garantiert, dass gewisse Differentialgleichungen G mit einer Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ wenigstens in einer geeigneten Umgebung von x_0 genau eine Lösung haben.

    (a) Geben Sie die Form der Differentialgleichung G sowie die Voraussetzungen an, unter denen dieser Satz gilt.

    (b) Der theoretische Hintergrund dieses Satzes ist das auch aus $\mathbb{R}$ bekannte Kontraktionsprinzip, welches unter den Voraussetzungen aus (a) auch auf Funktionen angewandt werden kann. Daraus ergibt sich ein Verfahren zur iterativen Annäherung an die gesuchte Lösung y. Beschreiben Sie dieses Verfahren.

    (c) Erläutern Sie, wie das Verfahren aus (b) zur Exponentialfunktion $y(x) = e^x$ als eindeutiger Lösung einer sehr einfachen Differentialgleichung mit Anfangsbedingung führt. Welcher?

28. Lineare Gleichungen und Differentialgleichungen

    (a) Vergleichen Sie die Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen über $\mathbb{R}$ einerseits und linearen Differentialgleichungen bzw. -gleichungssystemen andererseits. Gehen Sie sowohl auf den homogenen als auch auf den inhomogenen Fall ein. Diskutieren Sie dabei auch die Rolle von Anfangswerten.

    (b) Welche Lösungsmethoden sind Ihnen für gewisse spezielle lineare Differentialgleichungssysteme bekannt; insbesondere für solche, die aus nur einer Gleichung bestehen?

29. Geben Sie Beispiele von Differentialgleichungen – sowohl gewöhnlich als auch partiell – an, die Sie über außermathematische Problemstellungen motivieren können.