Analysis 1 für Lehramt, schriftliche Prüfung am 30.1.2009, Winkler mit Lösungen

1. Formulieren sie das Induktionsprinzip.

   Lösung: Ist $T \subseteq \mathbb{N}$ mit $0 \in T$ und $\forall n: \; n \in T \to n+1 \in T$, so folgt $T = \mathbb{N}$.

2. Erklären Sie, was eine Relation zwischen den Mengen A und B ist, was $f : A \to B$ bedeutet, und was man unter einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen versteht.

   Lösung: Relation: Teilmenge von $A \times B$.
   $f : A \to B$ bedeutet, dass f eine Abbildung von A nach B ist; das ist eine Relation zwischen den Mengen A und B mit folgender zusätzlichen Eigenschaft: Für jedes $a \in A$ gibt es genau ein $b \in B$ mit $(a, b) \in f$ (nämlich $b = f(a)$).
   Folge reeller Zahlen: Eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (übliche Schreibweise $f(n) = a_n$).

3. Gibt es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$? (Explizite Angabe oder Begründung.)

   Lösung: Ja, $a_n = 2^{-n}$.

4. Führen Sie einen formalen Beweis dafür, dass je zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_0 = b_0 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$ und $b_{n+1} = \frac{b_n}{2}$ übereinstimmen.

   Lösung: Wir zeigen mittels Induktion, dass $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Induktionsanfang ($n = 0$): $a_0 = 1 = b_0$. Induktionsschritt ($n \mapsto n+1$): Aus $a_n = b_n$ folgt $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} = \frac{b_n}{2} = b_{n+1}$.

5. Definieren Sie Grenzwert und Konvergenz von Folgen reeller Zahlen.

   Lösung: x heißt Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, symbolisch $\lim_{n\to\infty} a_n = x$ oder auch $a_n \to x$, wenn gilt $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : |a_n - x| < \varepsilon$. Eine Folge heißt konvergent, wenn es einen Grenzwert dieser Folge gibt.

6. Gibt es eine Zahl, die Grenzwert aller Folgen wie in 4. ist? (Begründung direkt mittels 5. Sie dürfen die Ungleichung $n < 2^n$ verwenden.)

   Lösung: Wegen 3. und 4. gibt es genau eine derartige Folge, nämlich $a_n = 2^{-n}$. Für beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$ sei $n_0 > \varepsilon^{-1}$. Dann folgt für alle $n \geq n_0$: $|a_n - 0| = 2^{-n} < n^{-1} \leq n_0^{-1} < \varepsilon$. Nach der Definition des Grenzwerts in 5. bedeutet das $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

7. Was ist eine Cauchyfolge?

   Lösung: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchyfolge, wenn gilt $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n_1, n_2 \geq n_0 : |a_{n_1} - a_{n_2}| < \varepsilon$.

8. Geben Sie eine strukturelle Eigenschaft an, hinsichtlich derer sich die geordneten Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ unterscheiden. (Mit *strukturell* ist gemeint, dass Sie nicht schlicht Elemente $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ angeben.)

   Lösung: Die Supremumseigenschaft (jede nichtleere nach oben beschränkte Menge besitzt ein Supremum) gilt in den reellen Zahlen, nicht in den rationalen.

9. Sei $A = \{a_n : \; n \in \mathbb{N}\}$ und $x = \lim_{n\to\infty} a_n$. Gilt immer/manchmal/nie $x \in A$?

   Lösung: Manchmal. (Beispiele: Bei konstanten Folgen ist $x \in A$, bei $a_n = 2^{-n}$ ist $x = 0 \notin A$.)

10. Wie 9., jedoch mit $x \in \overline{A}$ statt $x \in A$.

    Lösung: Immer. (In jeder Umgebung des Grenzwertes liegen Folgenglieder.)

11. Wie 9., jedoch mit $x \in A^o$ statt $x \in A$.

    Lösung: Nie. (A ist abzählbar, nichtleere offene Mengen in $\mathbb{R}$ aber überabzählbar, also ist A^o leer.)

12. Für eine Folge reeller Zahlen betrachten wir die beiden Aussagen:

    (a) Die Folge konvergiert.

    (b) Die Folge ist eine Cauchyfolge.

    Gelten die Implikationen (a)→(b) und (b)→(a) für alle reellen Folgen?

    Lösung: In den reellen Zahlen gelten beide Implikationen. (In nicht vollständigen metrischen Räumen nur die erste.)

13. Begründen Sie wenigstens eine Ihrer Antworten aus 12. mittels Beweis oder Gegenbeispiel.

    Lösung (Beweis der ersten Implikation): Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen x und $n_0 = n_0(\varepsilon/2)$ im Sinne von 5., so gilt für $n_1, n_2 \geq n_0$ die Ungleichung $|a_{n_1} - a_{n_2}| = |(a_{n_1} - x) + (x - a_{n_2})| \leq |a_{n_1} - x| + |x - a_{n_2}| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Nach 7. handelt es sich also um eine Cauchyfolge.

14. Definieren Sie für eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$, die Begriffe Partialsumme, Konvergenz, Wert der Reihe und absolute Konvergenz.

    Lösung: Partialsumme $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Die Reihe konvergiert, wenn es die Folge der Partialsummen s_n im Sinne von 5. tut. Der Grenzwert dieser Folge heißt dann Wert der Reihe. Die Reihe heißt absolut konvergent, wenn auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

15. Formulieren Sie das Cauchykriterium für Reihen mit reellen Gliedern.

    Lösung: Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass für alle $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \leq n_1 \leq n_2$ gilt: $|\sum_{n=n_1}^{n_2} a_n| < \varepsilon$.

16. Wie lautet das Majorantenkriterium für konvergente Reihen?

    Lösung: Ist $|a_n| \leq b_n$ für alle n und konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, so konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

17. Beweisen Sie dieses.

    Lösung: Wegen 15. erfüllen die b_n das Cauchykriterium für Reihen, wegen $\left|\sum_{n=n_1}^{n_2} a_n\right| \leq \sum_{n=n_1}^{n_2} |a_n| \leq \left|\sum_{n=n_1}^{n_2} b_n\right|$, daher auch die a_n, weshalb die von ihnen gebildete Reihe, wieder nach 15., ebenfalls konvergiert.

18. Sei $q \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie für $q \neq -1$ und $s_n = \sum_{k=0}^{n}(-q)^k$ die Gleichung $s_n = \frac{1-(-q)^{n+1}}{1+q}$.

    Lösung: Induktion nach n. Induktionsanfang ($n = 0$): $s_0 = (-q)^0 = 1 = \frac{1+q}{1+q} = \frac{1-(-q)^{0+1}}{1+q}$. Induktionsschritt: Die Formel gelte für n, so folgt $s_{n+1} = s_n + (-q)^{n+1} = \frac{1-(-q)^{n+1}}{1+q} + (-q)^{n+1} = \frac{1-(-q)^{n+1}+(1+q)(-q)^{n+1}}{1+q} = \frac{1-(-q)^{(n+1)+1}}{1+q}$.

19. Geben Sie eine Formel für s_n aus 18 an, wenn $q = -1$.

    Lösung: $(-(-1))^n = 1$, also $s_n = 1 + 1 + \ldots + 1 = n + 1$.

20. Folgern Sie die Formeln $\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n = \frac{2}{3}$ und $\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{2}{3})^n = \frac{3}{5}$ aus 18.

    Lösung: In der Formel ist $q = \frac{2}{3}$ bzw. $q = \frac{3}{5}$ zu setzen. Da in beiden Fällen $|q| < 1$ gilt, folgt $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$. Somit ergeben sich als Grenzwerte $\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$ bzw. $\frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}$.

21. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ das Cauchyprodukt der beiden Reihen in 20. Geben Sie eine Formel für die c_n an.

Lösung: $c_n = \sum_{k=0}^{n}(-\frac{1}{2})^k(-\frac{2}{3})^{n-k} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} 2^{n-2k}3^{k-n}$.

22. Welchen Wert hat die Reihe aus Frage 21? (Begründung!)

Lösung: Weil die beiden Reihen aus 18. absolut konvergieren, stimmt der Wert des Cauchyproduktes mit dem Produkt der Werte überein, also $\frac{2}{3}\frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.

23. Wie lautet die ε-δ-Definition für die Stetigkeit einer reellen Funktion f im Punkt x_0?

Lösung: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass für alle x mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

24. Wie lässt sich diese Eigenschaft mittels Grenzwerten von Folgen charakterisieren?

Lösung: Für beliebige reelle Folgen $a_n \to x_0$ gilt $f(a_n) \to f(x_0)$.

25. Beweisen Sie, dass aus 23. die von Ihnen in 24. formulierte Eigenschaft folgt.

Lösung: Gelte $a_n \to x_0$ und sei f stetig in x_0 im Sinne von 23. Für den Nachweis von $f(a_n) \to f(x_0)$ sei $\varepsilon > 0$. Wegen 23. gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass alle x mit $|x - x_0| < \delta$ auch $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ erfüllen. Wegen $a_n \to x_0$ und 5. gibt es ein n_0 derart, dass $|a_n - x_0| < \delta$ für alle $n \geq n_0$. Insgesamt gilt für diese $n \geq n_0$ also auch $|f(a_n) - f(x_0)| < \varepsilon$. Wiederum nach 5. beweist dies $f(a_n) \to f(x_0)$.