

## Analysis 1 für Lehramt, schriftliche Prüfung am 6.3.2009, Winkler

Name, Matrikelnummer:

Mündliche Prüfung am Do, 12.3.2009 (bitte ankreuzen):

- 15 Uhr
- ab 16 Uhr

Hinweise, bevor Sie beginnen:

- Rückseite nicht vergessen!
- Die angegebene Reihenfolge der Beispiele ist empfehlenswert, muss aber nicht eingehalten werden.
- Die einzelnen Teilfragen haben ungefähr gleiches Gewicht.
- Ihre Arbeitszeit beträgt 100 Minuten.

1. (a) Was ist ein angeordneter Körper  $(K, +, \cdot, \leq)$ ? (Sie dürfen die Begriffe *abelsche Gruppe* und *Totalordnung* als bekannt voraussetzen.)  
(b) Für welche  $K = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  ist  $(K, +, \cdot, \leq)$  ein angeordneter Körper?  
(c) Beschreiben Sie den Körper der reellen Zahlen auf eine Ihnen sympathische Weise. (Als richtig gelöst gilt die Frage, wenn Ihre Beschreibung den angeordneten Körper der reellen Zahlen bis auf Isomorphie eindeutig festlegt.)
2. (a) Beim Umgang mit rekursiven Folgen steht oft der folgende Satz im Hintergrund:  
Ist  $X$  eine beliebige Menge,  $f : X \times \mathbb{N} \rightarrow X$ , und  $x_0 \in X$ , so gibt es genau eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_0 = x_0$  und  $a_{n+1} = f(a_n, n+1)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .  
Beweisen Sie die Eindeutigkeitsaussage dieses Satzes. (Anleitung: Zeigen Sie mittels Induktion: Sind  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folgen auf  $X$  mit  $a_0 = b_0$  und  $a_{n+1} = f(a_n, n+1)$  sowie  $b_{n+1} = f(b_n, n+1)$ . Dann folgt  $a_n = b_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .)  
(b) Welches  $X$ ,  $x_0$  und  $f$  muss/kann man in 2a wählen, um  $a_n = n!$  zu bekommen?  
(c) Wie sind die Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{k}$ ,  $k \leq n \in \mathbb{N}$ , definiert?  
(d) Geben Sie eine kombinatorische Deutung der Binomialkoeffizienten.

- (e) Beweisen Sie die Beziehung

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

entweder rechnerisch (mittels 2c) oder induktiv/kombinatorisch (mittels 2d).

- (f) Wie lautet der binomische Lehrsatz?
- (g) Schreiben Sie die Werte der Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{k}$  für  $0 \leq n \leq 5$  und  $0 \leq k \leq n$  in Dreiecksform auf (jedes  $n$  entspricht einer Zeile, Schlagwort *Pascalsches Dreieck*) und stellen Sie einen Zusammenhang zu 2f her.
3. (a) Wann heißt eine Menge (eigentlich: ein topologischer Raum)  $X$  zusammenhängend?
- (b) Welche Teilmengen von  $\mathbb{R}$  sind zusammenhängend?
- (c) Geben Sie eine nicht zusammenhängende Menge  $A \subseteq \mathbb{R}$  an mit  $\overline{A^o} = [0, 1]$  und  $(\overline{A})^o = (0, 1)$ .
4. (a) Wie lässt sich eine Folge reeller Zahlen als Abbildung deuten?
- (b) Was ist eine Umordnung einer Folge?
- (c) Kann sich durch Umordnung einer Folge die Menge ihrer Häufungspunkte ändern? (Beispiel oder Begründung)
- (d) Kann sich durch Umordnung der Glieder einer Reihe das Konvergenzverhalten der Reihe ändern? (Beispiel oder Begründung)
- (e) Was bedeutet absolute Konvergenz einer Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ?
- (f) Welche Rolle spielt absolute Konvergenz im Zusammenhang mit 4d?
5. (a) Wann heißt eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}$ , stetig in  $x_0 \in D$ ?
- (b) Gegeben seien die Mengen reeller Zahlen  $A_1 = [0, 1]$ ,  $A_2 = (0, 1)$  und  $A_3 = \mathbb{Q}$  bzw.  $B_1 = [2, 3]$ ,  $B_2 = (2, 3)$ ,  $B_3 = [2, 3] \cup \{0\}$  und  $B_4 = \mathbb{R}$ . Für welche Wahlen von  $i = 1, 2, 3$  und  $j = 1, 2, 3, 4$  gibt es ein stetiges und surjektives  $f : A_i \rightarrow B_j$ ? Fassen Sie Ihre Antwort in einer  $3 \times 4$ -Tabelle zusammen.
- (c) Wählen Sie aus den 12 Antworten in 5b je eine positive und eine negative aus und begründen Sie diese durch explizite Angabe eines  $f$  bzw. mittels geeigneter theoretischer Sätze.
- (d) Geben Sie durch Formel oder Skizze ein  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  an, das genau an den Stellen  $x \in U_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  unstetig ist.
- $U_1 = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\} \cup \{0\}$
  - $U_2 = U_1 \setminus \{0\}$
  - $U_3 = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$
  - $U_4 = (0, 1]$