Mathematik 1 für Informatiker und Wirtschaftsinformatiker
Prüfung am 2.2.2010 (Winkler)

Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl:

Vergessen Sie nicht auf die Rückseite der Angabe!

1. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Ungleichung $U(n)$ gegeben durch $(n+1)2^n \leq 3^n$.
   (a) Bestimmen Sie (ohne formalen Beweis) die Menge A aller $n \in \mathbb{N}$, für die $U(n)$ nicht gilt.
   (b) Bestimmen Sie (ohne formalen Beweis) die Menge B aller $n \in \mathbb{N}$, für die folgende Aussage gilt: $\forall m \in \mathbb{N}: \ m \geq n \to U(m)$.
   (c) Wählen Sie ein n aus der Menge B und beweisen Sie formal mittels Induktion, dass für alle $m \geq n$ die Ungleichung $U(m)$ gilt.
   Anleitung: Für $m \geq 2$ ist $2^{m+1} = 2^3 \cdot 2^{m-2} \leq 3^2 \cdot 3^{m-2} = 3^m$.
   (d) Welche beiden Voraussetzungen muss eine Menge $T \subseteq \mathbb{N}$ erfüllen, damit das Induktionsprinzip die Gleichheit $T = \mathbb{N}$ garantiert?

2. Für den ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ bestehe die Menge V der Knoten aus jenen Punkten (x, y) der Ebene, deren Koordinaten ganzzahlig sind und die Gleichung $|x| + |y| = 2$ erfüllen. Je zwei dieser Punkte werden genau dann durch Kanten verbunden, wenn ihr (euklidischer) Abstand d in der Ebene die Ungleichung $0 < d \leq 2$ erfüllt.
   (a) Zeichnen Sie den Graphen G und nummerieren Sie die Knoten.
   (b) Geben Sie in Ihrer Nummerierung aus (a) eine Folge von Knoten so an, dass die verbindenden Kanten eine geschlossene Eulersche Linie in G bilden.
   (c) Definieren Sie allgemein, was man unter einer Eulerschen Linie versteht.
   (d) Formulieren Sie ein allgemeines Kriterium für die Existenz einer geschlossenen Eulerschen Linie in einem ungerichteten Graphen.

3. Die Teilmengen W_i des dreidimensionalen Raumes seien definiert als Mengen jener Punkte $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, die folgenden Bedingungen B_i, $i = 1, 2, 3, 4$ genügen: $B_1 : \; xy = 0$, $B_2 : \; x+y+z = 0$, $B_3 : \; x+y+z \geq 0$ und $B_4 : \; x + y + z = 1$.

   (a) Geben Sie eine verbale Beschreibung der geometrischen Gestalt der Mengen W_1, W_2, W_3 und W_4.

   (b) Welche der Mengen W_i sind Unterräume des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$?

   (c) Bestimmen Sie die Schnittmenge von W_4 mit jener Geraden, die durch den Koordinatenursprung sowie durch den Punkt $(1, 1, 1)$ geht.

   (d) Wählen Sie ein W_i, welches selbst Vektorraum ist, und geben Sie seine Dimension sowie eine Orthonormalbasis B dieses W_i an.

4. Gegeben seien die Zahlen $a_n = \frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Seien $f : A \to \mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(A)$ Potenzmenge von A, und $T \subseteq A$ die Menge jener $a \in A$ mit $a \notin f(a)$. Dann kann es kein $t \in T$ geben mit $f(t) = T$, also ist f nicht surjektiv. Warum folgt daraus $n < 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$?

   (b) Erklären Sie, warum $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, indem Sie sich direkt auf die Definition des Grenzwertes einer Folge beziehen.

   (c) Bestimmen Sie für $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ Partialsummen und Wert.

   (d) Wie ist der Wert einer unendlichen Reihe allgemein definiert?

5. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2$.

   (a) Berechnen Sie für $i = 1, 2, 3, 4$ die Differenzenquotienten $q_i = \frac{f(x_i)-f(x)}{x_i-x}$, wobei $x = 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{3}{2}$ und $x_4 = 2$. Stellen Sie die q_i in einer Skizze von f als Steigung von vier geeigneten Geraden g_i dar.

   (b) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ direkt durch Einsetzen und mittels geeigneter algebraischer Umformungen.

   (c) Stellen Sie in einer weiteren Skizze von f den in (b) berechneten Wert als Steigung einer Tangente t dar.

   (d) Bestätigen Sie Ihr Ergebnis aus (b) durch geeignete Differentiation.