Mathematik 1 für Informatiker und Wirtschaftsinformatiker
Prüfung am 5.3.2010 (Winkler)

Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl:

Vergessen Sie nicht auf die Rückseite der Angabe!

1. Die Zahl $\alpha = 13{,}1313\ldots$ habe eine Dezimaldarstellung mit Periodenlänge 2.
   (a) Wann heißt eine reelle Zahl x rational?
   (b) Finden Sie $m, n \in \mathbb{N}$ mit $\alpha = m \cdot \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{n})^k$.
   (c) Ist α rational? (Begründung)
   (d) Sind für $a, b \in \mathbb{N}$ mittels üblicher Division der Reihe nach die Nachkommastellen von $\frac{a}{b}$ zu ermitteln, so tritt in jedem Schritt als Rest eine natürliche Zahl r mit $0 \leq r < b$ auf. Da es nur endlich viele solche r gibt, muss es irgendwann zu Wiederholungen kommen. Daraus lässt sich eine Folgerung hinsichtlich der Rationalität der Zahl $\beta = 0,101001000100001\ldots$ ziehen. Wie?

2. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

   sowie die durch A dargestellte lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
   (a) Berechnen Sie die Determinante von A.
   (b) Das Ergebnis in Teil (a) war negativ. Was lässt sich daraus schließen bezüglich der geometrischen Gestalt der Menge M aller $x \in \mathbb{R}^3$, die durch f auf den Vektor $(17, -3, 29)$ abgebildet werden?
   (c) Durch welchen Wert a_{33} kann die Eintragung 0 rechts unten in A ersetzt werden, so dass sich die geometrische Gestalt der Menge M aus Teil (b) ändert.

(d) Was bedeutet es, dass $x \in \mathbb{R}^3$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ ist?

3. Sei $f(x) = 1 - \frac{1}{8}(x-2)^2$ für $x \in \mathbb{R}$, außerdem $x_0 = 0$ und $x_{n+1} = f(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Skizzieren Sie f im Bereich $-2 \leq x \leq 6$.

   (b) Tragen Sie die Folgenglieder x_1 und x_2 in der Skizze von f ein, ohne die Werte explizit auszurechnen. Hinweis: Die Diagonale $y = x$ ist sehr hilfreich.

   (c) Die folgende Rechnung zeigt, dass ein allfälliger Grenzwert x der x_n Fixpunkt von f sein muss. Welche Eigenschaft von f wird dabei verwendet? Wo?

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x).$$

   (d) Geben Sie Monotonie- und Konvergenzverhalten sowie gegebenenfalls den Grenzwert der x_n an.

4. Gegeben sei die Funktion $g(x) = e^{\sin x}$, $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Wie ist das Taylorpolynom zweiten Grades einer zweimal differenzierbaren reellen Funktion f an der Stelle x_0 definiert?

   (b) Skizzieren Sie g im Bereich $0 \leq x \leq 10$ schematisch und zeichnen Sie ein p mit $g(x+p) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ein.

   (c) Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extremwerte von g.

   (d) Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von g an der Stelle $x_0 = 0$.

5. Beim Lotto *3 aus 30* werden aus den Zahlen $1, 2, \ldots, 30$ zufällig 3 verschiedene ausgewählt, wobei es auf die Reihenfolge nicht ankommt.

   (a) Wieviele verschiedene Ergebnisse sind möglich?

   (b) Bei wievielen Ergebnissen haben alle drei Zahlen dieselbe Zehnerstelle? (Einstellige Zahlen haben die Zehnerstelle 0.)

   (c) Bei wievielen Ergebnissen kommen zwei aufeinanderfolgende Zahlen vor? Auch drei aufeinanderfolgende sollen dabei erlaubt sein.

   (d) Bei wievielen Ergebnissen ist das Produkt gerade?