Mathematatik 1 für Informatiker und Wirtschaftsinformatiker
Prüfung am 23.4.2010 (Winkler)

Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl:

Vergessen Sie nicht auf die Rückseite der Angabe!

1. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z = a + ib \mapsto \overline{z} = a - ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, die jeder komplexen Zahl z ihre Konjugierte $\overline{z}$ zuordnet.
   (a) Erklären Sie anhand einer Skizze, wie sich f in der komplexen Zahlenebene geometrisch deuten lässt.
   (b) Die Funktion f erfüllt für alle $z_j = a_j + ib_j$, $j = 1, 2$, die beiden Gleichungen
   $$f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2) \quad \text{und} \quad f(z_1 \cdot z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2).$$
   Bestätigen Sie die zweite durch direktes Nachrechnen.
   (c) Zeigen Sie mittels Induktion nach n, dass f auch die Gleichungen $f(z^n) = f(z)^n$, $n \in \mathbb{N}$, erfüllt. Anleitung: Verwenden Sie (b).
   (d) Bekanntlich gilt folgender Satz: Ist $p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten a_j und $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p, so ist auch $\overline{z_0}$ eine Nullstelle von p. Wie lässt sich dieser Satz mit Hilfe der vorangegangenen Aufgabenteile begründen? (Anleitung: Zeigen Sie zunächst $f(p(z)) = p(f(z))$.)

2. (a) Was versteht man unter einem Körper $(K, +, \cdot)$ mit Nullelement 0 und Einselement 1? (Sie dürfen als bekannt voraussetzen, was eine Gruppe ist.)
   (b) Der dreielementige Körper $K = \{0, 1, a\}$ sei gegeben. Geben Sie die Operationstafel für die Körperaddition $+$ an.
   (c) Geben Sie für den Körper K aus (b) die Operationstafel für die Körpermultiplikation $\cdot$ an.
   (d) Geben Sie ein nichtkonstantes Polynom $p(x)$ über dem Körper K aus den Teilen (b) und (c) an, das keine Nullstelle in K besitzt.

3. (a) Sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung (V beliebiger Vektorraum). Wann heißt v Eigenvektor von f zum Eigenwert λ?
   (b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear und $v = (1, 1)$ Eigenvektor von f zum Eigenwert $\lambda = 2$. Weiters gelte $f(1, 0) = (0, 2)$. Ermitteln Sie die Matrixdarstellung A von f bezüglich der kanonischen Basis.
   (c) Ermitteln Sie sämtliche Eigenwerte und Eigenvektoren von f.
   (d) f lässt sich als Verknüpfung einer Spiegelung um eine Achse a und einer Streckung um einen Faktor α deuten. Geben Sie a und α an.

4. $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichne eine beliebige Folge reeller Zahlen. Speziell sei außerdem die Folge $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$ gegeben.
   (a) Wann heißt x monoton wachsend, wann monoton fallend? (Definition!) Ist a monoton wachsend oder fallend?
   (b) Wann heißt x beschränkt? (Definition!) Geben Sie eine obere und eine untere Schranke von a explizit an.
   (c) Wann heißt x konvergent gegen einen Grenzwert α? (Definition!) Ist a konvergent? (Begründung!)
   (d) Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent? (Begründung!)

5. Gegeben ist die reelle Funktion $f(x) = x \sin x$.
   (a) Skizzieren Sie f auf dem Definitionsbereich $[-2\pi, 2\pi]$.
   (b) Berechnen Sie $f'(x), f''(x)$ und $f'''(x)$. (Zur Kontrolle: $f^{(4)}(x) = f(x) - 4\cos x$.)
   (c) Wie lautet die allgemeine Form der n-ten Ableitung $f^{(n)}(x)$? (Anleitung: Verwenden Sie (b) und unterscheiden Sie die Fälle $n = 4k$, $n = 4k + 1$, $n = 4k + 2$ und $n = 4k + 3$.)
   (d) Wie groß ist der Konvergenzradius r der Taylorreihe von f an der Anschlusstelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$? (Anleitung: Wenn Sie $\sin x = \cos(x - x_0)$ sowie die Konvergenzeigenschaften der Cosinusreihe beachten, können Sie viel Zeit sparen.)