Algebra
Prüfung am 27.1.2011 (Winkler)

Name, Matrikelnummer:
Termin der mündlichen Prüfung:

1. Gegeben sei die Algebra $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, f)$ vom Typ (1) mit $f(0) = 0$ und $f(n) = n - 1$ für $n > 0$.

   (a) Beschreiben Sie sämtliche Unteralgebren von $\mathcal{A}$.

   (b) Geben Sie sämtliche Partitionen auf $\mathbb{N}$ an, welche Kongruenzrelationen auf $\mathcal{A}$ entsprechen.

   (c) Gibt es einen Monomorphismus φ von einer 12-elementigen Algebra $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{A}$? (Begründung bzw. Angabe von $\mathcal{B}$ und φ)

   (d) Gibt es einen Epimorphismus ψ von $\mathcal{A}$ auf eine 12-elementige Algebra $\mathcal{B}$? (Begründung bzw. Angabe von $\mathcal{B}$ und ψ)

2. F bezeichne die von den beiden Elementen x und y frei erzeugte Gruppe, A die von den beiden Elementen a und b frei erzeugte abelsche Gruppe.

   (a) Welche Gestalt haben die Elemente von F und A? (Darstellung sämtlicher Elemente ohne Wiederholung)

   (b) Beschreiben Sie unter Verwendung von (a) den Gruppenhomomorphismus $\varphi : F \to A$ mit $\varphi(x) = a$ und $\varphi(y) = b$.

   (c) Geben Sie ein Element $w \in F$ an mit der Eigenschaft, dass der Kern von φ aus (b) der von w erzeugte Normalteiler ist.

   (d) Gibt es einen Epimorphismus ψ von F auf die additive Gruppe $\mathbb{Q}$? (Beispiel oder Begründung)

3. K bezeichne einen endlichen Körper mit $q = p^n$ Elementen, p prim, und $K[x] = \{\sum_{i=0}^{k} a_i x^i : \ a_i \in K, k \in \mathbb{N}\}$ die Menge der Polynome über K.

   (a) Definieren Sie binäre Operationen, welche die Menge K^K aller Funktionen $f : K \to K$ in natürlicher Weise zu einem kommutativen Ring mit Einselement machen.

(b) Was sind die Dimensionen der K-Vektorräume $K[x]$ und K^K?

(c) Geben Sie einen Ringhomomorphismus $\varphi : K[x] \to K^K$ an mit $\varphi(x) : K \to K$, $\alpha \mapsto \alpha$, für alle $\alpha \in K$.

(d) Von welchem $f \in K[x]$ wird der Kern von φ aus (c) erzeugt?

4. Sei $K = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ der fünfelementige Körper.

(a) Wieviele normierte $f \in K[x]$ vom Grad 2 sind irreduzibel?

(b) Für welche $a \in K$ ist der Ring $R = R_a = K[x]/I$ mit dem Hauptideal $I = (x^2 + a)$ sogar ein Körper? Halten Sie für die Aufgabenteile (c) und (d) ein solches a samt $R_a = R$ fest.

(c) Bestimmen Sie das Maximum aller $n \in \mathbb{N}$, zu denen es ein $r \in R \setminus \{0\}$ mit R aus (b) gibt derart, dass $r^k \neq 1$ für alle $k = 1, 2, \ldots, n-1$ gilt.

(d) Stellen Sie die multiplikativen Potenzen von $(x + I) \in R$ in der Gestalt $f + I$ mit Polynomen $f \in K[x]$ vom Grad < 2 dar.

5. B_n bezeichne die Boolesche Algebra mit 2^n Elementen.

(a) Skizzieren Sie das Hassediagramm der Halbordnung B_3.

(b) Wählen Sie eine praktische Darstellung von B_3 und B_5 sowie deren Elementen und beschreiben Sie damit einen Epimorphismus $\varphi : B_5 \to B_3$.

(c) Bezeichne $B_{\mathbb{Z}}$ die Potenzmengenalgebra über der Menge $\mathbb{Z}$. Geben Sie eine Boolesche Algebra B und einen Epimorphismus $\psi : B_{\mathbb{Z}} \to B$ explizit an, so dass $\psi^{-1}(1)$ ein Ultrafilter ist.

(d) Wir betrachten die Unteralgebren B_X und B_Y von $B_{\mathbb{Z}}$, die von den Mengen X bzw. Y erzeugt werden. X bestehe aus allen endlichen Teilmengen $T \subseteq \mathbb{Z}$, Y aus sämtlichen Restklassen modulo 17^m, $m = 1, 2, \ldots$. Begründen Sie, warum B_X und B_Y beide abzählbar, aber als Boolesche Algebren nicht isomorph sind.