Analysis 1 für Lehramt, Prüfung am 31.1.2012 (Winkler)

Name, Matrikelnummer:

Bitte warten Sie nach der schriftlichen Prüfung zwecks Vereinbarung der mündlichen.

Hinweise bevor Sie beginnen:
1. Bitte verwenden Sie nach Möglichkeit für jedes Beispiel ein eigenes Blatt.
2. Die einzelnen Teilfragen haben ungefähr gleiches Gewicht. Beginnen Sie daher zunächst mit den für Sie leichteren und schneller beantwortbaren Fragen.
3. Ihre Arbeitszeit beträgt 100 Minuten.

1. Gegeben sei die Menge $M = \{1, 2, 3\}$. Definitionsgemäß sind die binären Relationen auf M (kurz: Relationen auf M) genau die Teilmengen von $M \times M$. Entsprechend ist jede der Relationen, nach denen in dieser Aufgabe gefragt wird, als Menge geordneter Paare zu schreiben.
   (a) Wieviele Elemente hat $M \times M$, wieviele binäre Relationen gibt es auf M? (Angabe der Anzahlen reicht.)
   (b) Geben Sie eine Relation $R \subseteq M \times M$ an, die reflexiv auf M ist aber weder transitiv noch symmetrisch.
   (c) Geben Sie eine Relation $\leq_0$ auf M an, so dass $(M, \leq_0)$ eine Halbordnung mit $1 \in M$ als kleinstem Element ist, jedoch weder Totalordnung noch Äquivalenzrelation. Stellen Sie diese Halbordnung auch in einem Hassediagramm dar.
   (d) Geben Sie eine Relation $\leq_1$ auf M an, so dass $(M, \leq_1)$ eine Totalordnung ist. Stellen Sie diese Totalordnung auch in einem Hassediagramm dar.
   (e) Geben Sie jene Äquivalenzrelation $\sim$ auf M an, für welche die zugehörige Partition aus den Klassen $\{1\}$ und $\{2, 3\}$ besteht.
   (f) Geben Sie eine Relation $f \subseteq M \times M$ an, für die $f : M \to M$ gilt und die als Abbildung surjektiv ist, die aber weder Halbordnung noch Äquivalenzrelation ist.

2. Division mit Rest in $\mathbb{Z}$ zeigt, dass jedes $k \in \mathbb{Z}$ darstellbar ist in der Form $k = 3q+r$ mit einem Quotienten $q \in \mathbb{Z}$ und einem Rest $r \in \{0, 1, 2\}$. Diese Darstellung ist eindeutig. Insbesondere ist $r = r(k)$ durch k eindeutig bestimmt.
   (a) Beschreiben Sie die Mengen $\overline{0} = \{k \in \mathbb{Z} : \ r(k) = 0\}$, $\overline{1} = \{k \in \mathbb{Z} : \ r(k) = 1\}$ und $\overline{2} = \{k \in \mathbb{Z} : \ r(k) = 2\}$, die sogenannten Restklassen modulo 3.
   Da die Restklassen mudolo 3 eine Partition von $\mathbb{Z}$ bilden, ist dadurch auch eine Äquivalenzrelation gegeben, für die wir wie üblich $\equiv$ schreiben.
   (b) Will man auf der Menge R der Restklassen modulo 3 durch $[k]_\equiv + [l]_\equiv := [k + l]_\equiv$ eine Addition definieren, so stellt sich das Problem der Wohldefiniertheit in Form der Unabhängigkeit dieser Definition von der Wahl der Repräsentanten k und l. Welche Folgerung muss dafür aus den Annahmen $k_1 \equiv k_2$ und $l_1 \equiv l_2$ gezogen werden können?
   (c) Ähnlich zu (b) ist durch $[k]_\equiv \cdot [l]_\equiv := [k \cdot l]_\equiv$ auch die Multiplikation $\cdot$ von Restklassen wohldefiniert. Geben Sie alle neun Produkte $r_1 \cdot r_2$ mit $r_1, r_2 \in \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ in Form einer 3×3-Tabelle an. (Zur Kontrolle und zur späteren Verwendung: Für Restklassen $r_1, r_2 \neq \overline{0}$ ist stets auch $r_1 \cdot r_2 \neq \overline{0}$.)
   (d) Begründen Sie mit Hilfe von (c): $3|a^2$ impliziert $3|a$. (Wie üblich bedeutet hier $a|b$, dass a ein Teiler von b ist.)

(e) Es soll nun bewiesen werden, dass $\sqrt{3}$ irrational ist. Zu diesem Zweck führt man die Annahme $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ mit teilerfremden ganzen Zahlen a, b zu einem Widerspruch. Und zwar erhält man aus der Annahme durch Quadrieren $3 = \frac{a^2}{b^2}$, also $a^2 = 3b^2$, d.h. $3|a^2$, und wegen (d) $3|a$. Also lässt sich $a = 3a_0$ mit $a_0 \in \mathbb{Z}$ schreiben. Das setzen wir ein, und bekommen $3 = \frac{(3a_0)^2}{b^2}$. Setzen Sie die Argumentation an dieser Stelle fort, bis der gewünschte Widerspruch auftritt.

(f) Im Gegensatz zu $\mathbb{Q}$ enthält $\mathbb{R}$ sehr wohl ein $x > 0$ mit $x^2 = 3$. Verwenden Sie eine grundlegende Eigenschaft von $\mathbb{R}$, die $\mathbb{Q}$ nicht besitzt, um einen Kandidaten für so ein x zu finden. (Der Nachweis, dass ihr Kandidat tatsächlich die gewünschte Eigenschaft besitzt, muss hier nicht geführt werden, x muss aber richtig gewählt sein.)

3. Innerhalb des metrischen und somit topologischen Raumes $(\mathbb{R}, d)$ mit der üblichen Metrik $d(x, y) = |x - y|$ betrachten wir die beiden Teilmengen $A = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [2k, 2k + 1[$ und $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]\frac{1}{2n+2}, \frac{1}{2n+1}]$.

(a) Skizzieren Sie die Mengen A und B auf der Zahlengeraden.

(b) Gibt es kompakte Mengen $K_A, K_B \subseteq \mathbb{R}$ mit $A \subseteq K_A$ bzw. $B \subseteq K_B$? (Jeweils Beispiel oder Begründung)

(c) Gibt es zusammenhängende Mengen $Z_A, Z_B \subseteq \mathbb{R}$ mit $A \subseteq Z_A$ bzw. $B \subseteq Z_B$? (Jeweils Beispiel oder Begründung)

(d) Verallgemeinern Sie Ihre Überlegungen in den Teilen (b) und (c), indem Sie charakterisieren, welche Teilmengen $T \subseteq \mathbb{R}$ in einer geeigneten kompakten Menge K_T enthalten sind und welche in einer geeigneten zusammenhängenden Menge Z_T.

(e) Erklären Sie für jeden der fünf Punkte $x \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$, ob es sich in Bezug auf A um einen inneren, äußeren oder um einen Randpunkt handelt.

(f) Geben Sie A^o, B^o (Inneres), $\overline{A}, \overline{B}$ (Abschluss) und $\partial A, \partial B$ (Rand) der Mengen A und B an.

4. (a) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Was bedeutet es für eine Folge von Elementen $a_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, gegen einen Grenzwert $x \in X$ zu konvergieren, was eine Cauchyfolge zu sein?

(b) Seien die reellen Zahlen a_n, $n \in \mathbb{N}$, Glieder einer unendlichen Reihe. Wie sind die Partialsummen s_n definiert, wie Konvergenz, wie (im konvergenten Fall) der Wert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und wie absolute Konvergenz?

(c) In $\mathbb{R}$ ist jede Cauchyfolge konvergent. Wenden Sie diesen Sachverhalt auf die Partialsummen von Reihen an, um das Majorantenkriterium zu beweisen: Aus $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ folgt die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(d) Zeigen Sie in ähnlicher Weise wie in (c), dass jede absolut konvergente Reihe konvergent ist.

(e) Gegeben seien die Glieder $a_k = b_k - c_k$ mit $b_k = \frac{1}{2k-1}$ und $c_k = \frac{1}{2k+1}$. Berechnen Sie die Partialsummen $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Hinweis: Beachten Sie $c_k = b_{k+1}$.

(f) Untersuchen Sie die drei Reihen der a_k, b_k und c_k aus (e) auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.