Analysis 1 für Lehramt, Prüfung am 2.3.2012 (Winkler)

Name, Matrikelnummer:

Mündliche Prüfung (bitte ankreuzen):
∘ Noch heute (Fr, 2.3.) um 16 Uhr.
∘ Nach persönlicher Vereinbarung ab Mo, 5.3.

Hinweise bevor Sie beginnen:

1. Bitte verwenden Sie nach Möglichkeit für jede der vier Aufgaben ein eigenes Blatt.
2. Die einzelnen Teilfragen haben ungefähr gleiches Gewicht.
3. Ihre Arbeitszeit beträgt 100 Minuten.
4. Vergessen Sie nicht auf die Rückseite der Angabe.

1. Für eine Menge X bezeichne $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X, d.h. die Menge aller Teilmengen. Weiters bezeichne F_X die Menge aller $f : X \to \mathcal{P}(X)$.

   (a) Geben Sie eine (möglichst kleine) Menge M an, welche alle $f \in F_X$ als Teilmenge enthält. (Hinweis: Funktionen sind gewisse Mengen geordneter Paare.)

   (b) Für ein beliebiges $f \in F_X$ sei $T_f := \{x \in X : \ x \notin f(x)\}$. Begründen Sie, warum T_f nicht im Wertebereich von f liegt. (Anleitung: Führen Sie die Annahme $T_f = f(x_0)$ auf einen Widerspruch.)

   (c) Wie sind für zwei beliebige (möglicherweise unendliche) Mengen A, B die Beziehungen $|A| \leq |B|$ bzw. $|A| = |B|$ definiert?

   (d) Begründen Sie, warum stets $|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$ (Hinweis: Mengen der Form $\{x\}$ sind nützlich), jedoch nie $|X| = |\mathcal{P}(X)|$ gilt (Hinweis: (b)).

   (e) Bezeichne $B := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Folgen $b = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \in \{0,1\}$. Sie dürfen aus einer Übungsaufgabe verwenden, dass die Abbildung $\varphi : B \to C$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2a_n}{3^{n+1}}$ eine Bijektion zwischen B und der Cantormenge C ist. Begründen Sie die Beziehung $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |B| = |C| \leq |\mathbb{R}|$ (aus der die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ folgt).

2. Das Induktionsprinzip besagt bekanntlich, dass eine Menge $T \subseteq \mathbb{N}$ bereits mit ganz $\mathbb{N}$ übereinstimmen muss, sofern sowohl der Induktionsanfang $0 \in T$ als auch alle Implikationen $n \in T \to n+1 \in T$ (für alle $n \in \mathbb{N}$, Induktionsschritt) gelten.

   (a) Im Induktionsprinzip kann auf den Induktionsanfang nicht verzichtet werden. Mit anderen Worten: Es gibt eine echte Teilmenge T von $\mathbb{N}$, wo alle Implikationen im Induktionsschritt gültig sind, nicht aber der Induktionsanfang. Geben Sie so ein T an.

   (b) Im Induktionsprinzip kann auch auf keine der (unendlich vielen) Implikationen im Induktionsschritt verzichtet werden. Mit anderen Worten: Zu einem beliebigen $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt es eine echte Teilmenge T_{n_0} von $\mathbb{N}$, wo der Induktionsanfang gilt und alle Implikationen des Induktionsschritts mit der einzigen Ausnahme $n = n_0$. Geben Sie eine solche Menge T_{n_0} explizit an.

   (c) In einem angeordneten Körper K folgt aus $0 < x < y$ stets $0 < y^{-1} < x^{-1}$. Verwenden Sie dies, um für $a, b \in K$ mit $a, b > 0$ die Ungleichung $\frac{1}{a+b} < \frac{1}{a}$ herzuleiten. Geben Sie dabei genau an, welche Gesetze Sie sonst noch verwenden.

   (d) Für einen Punkt $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ sei $f(x) := ||x||_1 + ||x||_2 + ||x||_\infty$ (Summen-, euklidische und Maximumsnorm). Gibt es eine reelle Zahl s mit $s \geq f(x)$ für alle x mit $||x||_2 \leq 1$, für die zusätzlich gilt: Gelten für ein weiteres $s' \in \mathbb{R}$ ebenfalls die Ungleichungen $s' \geq f(x)$ für alle x mit $||x||_2 \leq 1$, so ist $s \leq s'$. (Begründung!)

   (e) Für den Fall, dass Ihre Antwort in (d) positiv war, geben Sie ein $s' \in \mathbb{R}$ an mit $s \leq s'$; andernfalls geben Sie ein x an mit $f(x) > 2012$.

3. Wir betrachten den topologischen Raum $X = \mathbb{R}^2$ (Ebene) mit der natürlichen Topologie. Für Teilmengen $T \subseteq \mathbb{R}^2$ bezeichne weiters ∂T den Rand und $\overline{T}$ den Abschluss von T. Wir betrachten speziell die Mengen $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x+y > 1\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x-y > 1\}$ und $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x < 0\}$.

   (a) Skizzieren Sie jede der Mengen A, B und C.

   (b) Geben Sie jeweils einen Punkt (x, y) in $\partial A \cap \partial B$ an, in $\partial B \cap \partial C$ und in $\partial B \cap \partial C$ an.

   (c) Geben Sie einen Punkt (x, y) an, der nicht in $\overline{A \cup B \cup C}$ liegt.

   (d) Geben Sie eine nichtleere offene Menge $O \subseteq \mathbb{R}^2$ an, welche $\overline{A \cup B \cup C}$ nicht schneidet.

   (e) Die Mengen A, B und C sind konvex. Was bedeutet dies, und sind auch die Mengen $A \cap B$, $A \cap C$ und $B \cap C$ konvex?

4. Gegeben seien die Zahlen $a_n = n + (-1)^n n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Wann heißt allgemein $x \in X$ Häufungspunkt einer Folge von Elementen $x_n \in X$ eines topologischen Raumes X, wann Grenzwert?

   (b) Bestimmen Sie die Menge HP aller Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und geben Sie (sofern HP nicht leer ist) eine konvergente Teilfolge an (im topologischen Raum $X = \mathbb{R}$ mit der natürlichen Topologie).

   (c) Wie (b), jedoch für die Folgen der $b_n = (a_n, a_n) \in \mathbb{R}^2$ und $c_n = (a_n, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^2$ (im topologischen Raum $X = \mathbb{R}^2$ mit der natürlichen Topologie).

   (d) Berechnen Sie die Zahl $s_{1000} := \sum_{n=0}^{1000} a_n$.

   (e) Die aus den Gliedern a_n gebildete Reihe konvergiert nicht, weil die a_n keine Nullfolge bilden. Hinsichtlich der Umkehrung des zugrunde liegenden allgemeinen Satzes stellt sich die Frage, ob es Nullfolgen gibt, die eine divergente Reihe bilden. Ist dies der Fall? (Beweis oder Gegenbeispiel).