Mathematik 1 für Bauingenieure, Prüfung am 9.5.2014, Winkler

Name, Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Hinweise bevor Sie beginnen:
Die einzelnen Teilfragen haben ungefähr gleiches Gewicht.
Ihre Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
Vergessen Sie nicht auf die Rückseite der Angabe.
Die einzelnen Teile jeder der vier Aufgaben hängen zwar thematisch eng miteinander zusammen. Trotzdem sind die meisten alleine aufgrund der Angabe lösbar, ohne die Lösungen der anderen. Sollte Ihnen ein Teil schwer fallen, könnten Sie es also zunächst mit leichteren versuchen. Manchmal ergeben sich daraus auch zusätzliche Hilfen.

1. (a) Skizzieren Sie am Einheitskreis die Bedeutung eines Winkels α im Bogenmaß und die geometrische Interpretation von $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ und $\cot\alpha$.

   (b) Zu einem beliebigen Punkt (x, y) in der Ebene $\mathbb{R}^2$ gibt es eine reelle Zahl $r \geq 0$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ derart, dass die beiden Gleichungen $x = r\cos\alpha$ und $y = r\sin\alpha$ erfüllt sind. Veranschaulichen Sie anhand einer Skizze, wie man solche Zahlen $r, \alpha \in \mathbb{R}$ geometrisch finden kann.

   (c) Sei $(x, y) \neq (0, 0)$. Sind die Zahlen r, α in (b) eindeutig bestimmt? Wenn ja, warum? Wenn nein, erklären Sie genauer, wie man aus einem Paar (r, α) mit dieser Eigenschaft alle weiteren bekommen kann.

   (d) Wir interpretieren $\mathbb{R}^2$ nun als komplexe Zahlenebene $\mathbb{C}$. Die komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ liege in der Exponentialdarstellung $z = re^{i\alpha}$ mit reellen Zahlen $r \geq 0$ und α vor. Wie lassen sich aus r und α reelle Zahlen $R > 0$ und β errechnen, für die $z^3 = Re^{i\beta}$ gilt?

   (e) Angenommen der Punkt (x, y) liegt auf dem Einheitskreis. Geht man vom Punkt $(1, 0)$ die Kreislinie gegen den Uhrzeigersinn entlang, bis man den Punkt (x, y) erreicht, legt man eine Weglänge zurück, die mit α bezeichnet sei. Legt man auf der Kreislinie statt α nur die Weglänge $\frac{\alpha}{3}$ zurück, so erreicht man einen anderen Punkt, der die Koordinaten (x', y') habe. Wir betrachten nun die komplexen Zahlen $z = x + iy$ und $z' = x' + iy'$. Geben Sie reelle Zahlen a, b, c, d an, für welche die Gleichung $az'^3 + bz'^2 + cz' + d = z$ gilt. (Anleitung: Hat diese Aufgabe etwas mit (d) zu tun?)

2. Gegeben sei die reelle Funktion $f(x) := \frac{x}{1-x}$ sowie folgende Umformungen, die eine Potenzreihendarstellung von f um die Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ liefern:

$$f(x) = -\frac{-x}{1-x} = -\frac{(1-x)-1}{1-x} = -(1 - \frac{1}{1-x}) = -1 + \frac{1}{1-x} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

   (a) Skizzieren Sie die Funktion f. Jedenfalls klar erkennbar sein sollen der maximale Definitionsbereich, allfällige Nullstellen, Asymptoten, Polstellen und Extrema.

   (b) Berechnen Sie $f(0), f'(0), f''(0)$ und $f'''(0)$ durch Anwendung der relevanten Differentiationsregeln auf einen der Funktionsterme in $f(x) = \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}$.

   (c) Wie lassen sich aus einer gegebenen Potenzreihe $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ mit positivem Konvergenzradius sämtliche Ableitungen $g^{(n)}(x_0)$, $n \in \mathbb{N}$, der durch die Reihe dargestellten Funktion g im Entwicklungspunkt x_0 ablesen?

   (d) Wenden Sie die Methode aus (c) auf $g = f$ an, um Ihre Ergebnisse aus (b) zu überprüfen.

   (e) Geben Sie die Koeffizienten b_i, $i = 0, 1, 2, 3$, jener Polynomfunktion p, $p(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$, vom Grad 3 an, für die $p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$, $p''(0) = f''(0)$ und $p'''(0) = f'''(0)$ gilt.

3. Jede Logarithmusfunktion $\log_b$ zu einer Basis $b > 0$ erfüllt die sogenannte Funktionalgleichung $\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$. Die Basis $b = e$ (Eulersche Zahl) zeichnet sich dadurch aus, dass $\ln := \log_e$ an der Stelle 1 die Ableitung $\ln'(1) = 1$ hat. Durch diese Eigenschaften ist der natürliche Logarithmus $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ eindeutig bestimmt.

   Außerdem sei die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definiert durch

   $$f(x) := \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$$

   (wobei die Regel $\int_a^b f(t)\, dt = -\int_b^a f(t)\, dt$ anzuwenden ist).

   (a) Für jede auf einem Intervall $[a, b]$ Riemann-integrierbare Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ und jede reelle Zahl $c \neq 0$ gilt laut Substitutionsregel eine Formel der Gestalt

   $$\int_a^b g(t)\, dt = \int_{a'}^{b'} g(\frac{u}{c})c'\, du$$

   für geeignete Zahlen $a', b', c' \in \mathbb{R}$, die nicht von der speziellen Wahl von g abhängen. Wie ergeben sich diese drei Zahlen aus a, b und c?

   (b) Verwenden Sie die lineare Variablensubstitution $u = ct$ (c ist dabei beliebig positiv und fest), um die Gleichung $f(x) = f(cx) - f(c)$ zu bestätigen. (Dieser Aufgabenteil ist unbedingt mit Hilfe der Substitutionsregel der Integralrechnung zu lösen, so wie durch Teil (a) vorgezeichnet.)

   (c) Begründen Sie, warum aus (b) für alle $x, y > 0$ die Gleichung $f(xy) = f(x)+f(y)$ folgt.

   (d) Wie lautet der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung? (Sollten Sie mehrere Fassungen kennen, geben Sie jene an, die für Teil (e) hilfreich ist.)

   (e) Folgern Sie aus dem Bisherigen, dass $f = \ln$ gilt.

4. Die Extremwertbestimmung für eine reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ hat mit dem Nullsetzen der Ableitung f' zu tun. Diese ziemlich vage Aussage bedarf aber einiger Präzisierungen. Darauf zielt die vorliegende Aufgabe ab.

   (a) Geben Sie ein Beispiel einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ an, wo $f'(x_0) = 0$ gilt, bei x_0 aber trotzdem kein lokales Extremum von f vorliegt. (Formel für f und Skizze!)

   (b) Geben Sie ein Beispiel dafür, dass die Ableitung von f an einer Extremstelle x_0 auch von 0 verschieden sein kann, sofern x_0 kein innerer Punkt des Definitionsbereichs von f ist.

   (c) Die Ableitung $f'(x_0)$ von f an einem inneren Punkt x_0 von D ist als Differentialquotient $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ definiert. Diese Grenzwertschreibweise ist eine Kurzformel für eine Aussage der Form: *Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle x mit $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ und $x \neq x_0$ die Ungleichung $|A - f'(x_0)| < \varepsilon$ gilt.* Wofür steht A, damit sich eine korrekte Formulierung ergibt?

   (d) Angenommen x_0 ist ein innerer Punkt von D und $f'(x_0) > 0$. Geben Sie ein $\varepsilon > 0$ an, so dass für das laut (c) zugehörige $\delta > 0$ gilt: Alle x_1, x_2 mit $x_0-\delta < x_1 < x_0 < x_2 < x_0+\delta$ erfüllen die Ungleichung $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

   (e) Ist in (d) $f'(x_0) < 0$, so gilt die entsprechende Aussage. Welcher Satz, auf den in der Einleitung dieser Aufgabe angespielt wurde, folgt daraus? (Achten Sie bei Ihrer Formulierung sorgfältig darauf, was Voraussetzung, was Folgerung ist, und vergessen Sie keine Voraussetzung an f und an x_0.)