Mathematik 1 für Bauingenieure

Prüfung am 10.10.2014
Reinhard Winkler

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus vier Aufgaben 1,2,3,4, untergliedert in jeweils vier Teilaufgaben A,B,C,D. Zu jeder Teilfrage wird maximal ein Punkt vergeben. Ab 8 von 16 möglichen Punkten ist Ihnen eine positive Note sicher.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Zu jeder Teilaufgabe wird der Punkt (oder Teile eines Punktes) ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar neben bzw. unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe).

  In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die Lösung der Aufgabe ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, sich vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung. Was immer sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Punkte für Aufgabe 1: Aufgabe 2: Aufgabe 3: Aufgabe 4:

Gesamtpunktezahl:

Note:

Sonstige Bemerkungen:

Aufgabe 1: Auf dem Einheitsintervall $[0,1]$ sei für jedes $c \in \mathbb{R}$ die quadratische Polynomfunktion f_c definiert durch:

$$f_c : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x + cx(1-x) = -cx^2 + (1+c)x.$$

Offenbar gilt $f_c(0) = 0$ und $f_c(1) = 1$ für alle $c \in \mathbb{R}$. Für $0 < x < 1$ hingegen wächst und fällt $f_c(x)$ mit c, weshalb sich eventuell auch die Extremstellen von f_c verändern können.

Teilaufgabe A: Berechnen Sie $f_c'(x)$ und daraus die einseitigen Ableitungen $f_c'(0)$ und $f_c'(1)$. Ermitteln Sie jene $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ mit $f_{c_0}'(0) = 0$ und $f_{c_1}'(1) = 0$.

Teilaufgabe B: Für welche Werte von c hat $f_c : [0,1] \to \mathbb{R}$ an der Stelle 0 ein Minimum? Für welche Werte von c hat f_c an der Stelle 1 ein Maximum?
Hinweis: Die Zahlen c_0 und c_1 aus Teilaufgabe A spielen auch hier eine Rolle.

Teilaufgabe C: Auch in jenen Fällen, wo f_c kein Minimum bei 0 oder kein Maximum bei 1 hat, gibt es auf $[0,1]$ eine Minimumstelle, die wir mit $x_0(c)$ bezeichnen, und eine Maximumstelle, die wir mit $x_1(c)$ bezeichnen. Ermitteln Sie Funktionsterme für $x_0(c)$ und $x_1(c)$ in Abhängigkeit von c und geben Sie an, für welche c diese Terme tatsächlich die gesuchte Extremstelle liefern.
Hinweis: Die Funktionsterme für $x_0(c)$ und $x_1(c)$ sind dieselben.

Teilaufgabe D: Fertigen Sie eine qualitative Skizze der Funktionen f_c für die Werte $c = -4, 0, 4$ an, aus der deutlich erkennbar ist, ob die Extrema am Rand oder im Inneren liegen.

Aufgabe 2: Für Teilmengen M von $\mathbb{R}$ betrachten wir **Zerlegungen** in zwei Mengen A, B, d.h. in Teilmengen mit $A \cup B = M$ und $A \cap B = \emptyset$. Wir nennen die Zerlegung **echt**, wenn A und B beide nicht leer sind, und **geordnet**, wenn $a < b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$ gilt. Wir werden im Folgenden nur Zerlegungen betrachten, die echt und geordnet sind. Die Menge A nennen wir dann den **linken Teil** der Zerlegung, die Menge B den **rechten**.

Eine echte, geordnete Zerlegung einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ in einen linken Teil A und einen rechten Teil B kann die Eigenschaft haben, dass es ein $r \in \mathbb{R}$ gibt mit $a < r < b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$. So ein $r \in \mathbb{R}$, das also selbst **nicht** in M liegt, heiße **Trennungspunkt** für die Zerlegung.

Teilaufgabe A: Für $M := \mathbb{Z}$ sei die echte geordnete Zerlegung in den linken Teil $A := \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ und den rechten Teil $B := \mathbb{N}$ gegeben. Geben Sie einen Trennungspunkt r für diese Zerlegung an und skizzieren Sie die Situation.

Teilaufgabe B: Für $M := \mathbb{Q}$ sei die echte geordnete Zerlegung in den linken Teil $A := \{m \in M : \ m < 0\}$ und den rechten Teil $B := \{m \in M : \ m \geq 0\}$ gegeben. Gibt es einen Trennungspunkt r für diese Zerlegung? Veranschaulichen Sie Ihre Antwort anhand einer Skizze.

Teilaufgabe C: Welche der folgenden Möglichkeiten i), ii) oder iii) trifft für $M := \mathbb{Q}$ zu?
i) Zu jeder echten geordneten Zerlegung von M gibt es einen Trennungspunkt.
ii) Zu keiner echten geordneten Zerlegung von M gibt es einen Trennungspunkt.
iii) Es gibt geordnete Zerlegungen von M ohne wie auch solche mit Trennungspunkt.
Markieren Sie die richtige Antwort und geben Sie eine kurze Begründung.

Teilaufgabe D: Welche der drei Möglichkeiten i), ii), iii) in Teilaufgabe C trifft zu, wenn man $M := \mathbb{R}$ statt $M = \mathbb{Q}$ betrachtet? Begründen Sie Ihre Antwort (richtiges Schlagwort genügt).

Aufgabe 3: Für $a, b \in \mathbb{R}$ sei die Funktion $T_{a,b} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$T_{a,b}(x) := a + b\sqrt{x}.$$

Wir interessieren uns für Fixpunkte von $T_{a,b}$, d.h. Werte $x \geq 0$ mit $T_{a,b}(x) = x$.

Teilaufgabe A: Skizzieren Sie den Graph der Funktion $T_{2,1}$ im Bereich $[0, 9]$ und schneiden Sie ihn mit jener Geraden, an der die Fixpunkte beliebiger Funktionen abgelesen werden können, und markieren Sie den Fixpunkt x_0 von $T_{2,1}$.

Teilaufgabe B: Begründen Sie rechnerisch, warum $T_{2,1}$ nur einen Fixpunkt x_0 hat und geben Sie diesen an.

Teilaufgabe C: Geben Sie die Menge M all jener Paare $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ mit $a, b \geq 0$ an, für die $T_{a,b}$ zwei Fixpunkte hat.

Teilaufgabe D: Geben Sie ein $a < 0$ und ein zugehöriges b an derart, dass $T_{a,b}$ zwei Fixpunkte hat.

Aufgabe 4: Wir betrachten die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, die durch $f(0) := 0$ und $f(x) := \sin \frac{1}{x}$ für $x > 0$ gegeben ist.

Teilaufgabe A: Skizzieren Sie f für $0 \leq x \leq 5$ und zeigen Sie, dass f bei $x = 0$ unstetig ist, indem Sie ein $\varepsilon > 0$ angeben, für das es kein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(0)| = |f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in (0, \delta)$ gibt.

Teilaufgabe B: Für alle $0 < a < b < \infty$ ist f auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar. Formulieren Sie zur Rechtfertigung dieser Behauptung einen geeigneten allgemeinen Satz.

Teilaufgabe C: Ist f auch auf $[0, b]$ mit beliebigem $b > 0$ Riemann-integrierbar? Geben Sie für Ihre Antwort auch eine kurze Begründung.

Teilaufgabe D: Welches Phänomen tritt für den Wert von $\int_1^b f(x)\, dx$ beim Grenzübergang $b \to \infty$ auf:
(i) Konvergenz gegen einen endlichen Wert
(ii) Divergenz gegen $-\infty$
(iii) Divergenz gegen ∞
(iv) keines von (i), (ii), (iii) (d.h. Oszillation mit $\liminf < \limsup$)

Geben Sie für ihre Antwort auch eine kurze Begründung. (Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass für $0 < y \leq 1$ stets $\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \ldots \geq \frac{y}{2}$ gilt.)

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.